Norma

3 CONTEXTO MATEMÁTICO

Secundaria

Alejandro Olea Díaz

Eduardo Basurto Sánchez

Marco Antonio Rivera Paredes

Esta obra fue elaborada bajo la dirección editorial de Lorenza Cecilia Estandía González-Luna.

Participaron en la presente edición:

Jefe editorial: Alejandro Barrera Damián
Coordinación editorial: Azucena García Nares
Revisión técnica y pedagógica: Mario Rivera Álvarez
Redacción de evaluaciones tipo PISA y Conexiones: Ariel Ávila
Corrección de estilo: Gloria Fuentes Sáenz y Sonia Ibarra Martínez
Lectura ortotipográfica: Rubén Jiménez Flores y Gloria Fuentes Sáenz
Coordinación de diseño: Carlos García Ortega
Diseño original de interiores y de cubierta: acHeBe Diseño (Hilda Bustos Barrera)
Diseño de cubierta: Carlos García Ortega
Diagramación y tipografía: Alerick Sinuhé Monter Castillo
Investigación iconográfica: Emmanuel de la Cruz Hinojos
Ilustración: Sergio Salto Gutiérrez
Fotografía: Shutterstock y Archivo Norma

Contexto matemático 3. Matemáticas, tercer grado de secundaria

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro número 3074

ISBN 978-607-722-142-5

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición: 2014

Esta obra se terminó de imprimir en los talleres de Reproducciones Fotomecánicas S.A. de C.V. con domicilio en calle Durazno 1, Col. Las peritas, Delegación Xochimilco, C.P. 16010, México, D.F., en el mes de abril de 2016.

Introducción

Contexto matemático 3 es una propuesta didáctica dirigida a los estudiantes de tercer grado de secundaria que pretende propiciar el manejo integral de los contenidos de la asignatura, con la finalidad de que los alumnos sean sujetos activos en la construcción de su aprendizaje.

Al mismo tiempo, se intenta favorecer que el alumno resuelva problemas de manera autónoma, que exprese, represente e interprete información matemática; que adquiera la confianza suficiente para explicar, justificar y argumentar sus respuestas y procedimientos, que encuentre significado y sentido a los números y operaciones; que sepa elegir adecuadamente procedimientos o atajos en las operaciones al resolver un problema.

Con las secuencias didácticas que se proponen durante las 33 lecciones, se busca despertar el interés de los estudiantes por la asignatura y coadyuvar al desarrollo de una forma de pensamiento con la que expresen matemáticamente las situaciones que se presentan en diversos entornos sociales y culturales.

Finalmente, se promueve el uso de técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas, en la búsqueda de que los estudiantes asuman una actitud positiva hacia el estudio de las matemáticas, mediante una colaboración crítica, tanto en el ámbito social y cultural en que se desempeñen, como en otros diferentes campos de la actividad productiva.

AL ALUMNO

Este libro de texto titulado *Contexto matemático 3* es una obra elaborada especialmente para ayudarte en el estudio y aprendizaje de las matemáticas, pensando en tu curiosidad y en la disposición para enfrentarte a nuevos desafíos; en éste tendrás la oportunidad de explorar, mediante actividades que se te proponen, del trabajo individual o en equipo y con el apoyo de tu profesor, el fascinante mundo de los números, las formas, el espacio, la medida, así como el manejo de la información.

Sin embargo, para que juntos logremos que aprendas los contenidos de las lecciones, es muy importante que te involucres en las actividades que se te plantean y que las discutas con tus compañeros; de esta manera estarás en posibilidades de darte cuenta de tus aciertos o errores.

Esperamos que esta experiencia de aprendizaje te permita observar que las matemáticas son una forma interesante y útil de conocer la realidad, y que están presentes no sólo en las ciencias, sino en el arte, los deportes y la vida de todos los días.

El libro está conformado por 33 lecciones que te llevarán, mediante las secuencias didácticas, a apropiarte de los conocimientos que se presentan y a desarrollar habilidades matemáticas. Para ello, necesitas adquirir la confianza y la seguridad suficientes para resolver problemas mediante el descubrimiento, el análisis, la reflexión y la ejecución de tus propios métodos; pero, sobre todo, haciendo a un lado la memorización. Por eso es importante que al tener una estrategia o un procedimiento de resolución de problemas, lo comuniques a tus compañeros y argumentes cómo lograste llegar a la solución.

Por la forma en que está estructurado, este libro te propone una gran variedad de situaciones, de manera que tengas la oportunidad de analizar, debatir y escuchar a tus compañeros, así como de comunicar y argumentar sobre el trabajo que desarrollen durante las lecciones. Esperamos que esta obra sea una herramienta útil para experimentar el placer de hacer y aprender matemáticas. ¡Deseamos que alcances el mayor de los éxitos!

Los autores

AL PROFESOR

Quienes intervenimos en la redacción y diseño de esta obra tenemos el objetivo principal de colaborar con usted en una tarea que sabemos está llena de complicaciones y expectativas.

La estructura didáctica de *Contexto matemático 3* favorece el uso de procedimientos informales que evolucionan hacia la utilización de herramientas matemáticas cada vez más eficientes porque, como usted sabe, el planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que se sugiere para el estudio de Matemáticas, es que se utilicen secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los invite a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolverlas y a formular argumentos que validen los resultados. Al mismo tiempo, buscamos que las situaciones planteadas impliquen justamente los conocimientos y las habilidades que se quieren desarrollar.

Los contenidos de las lecciones han sido desglosados en tres niveles: eje temático, tema y contenido. Cada lección se desarrolla a partir de una secuencia de situaciones problemáticas cuidadosamente seleccionadas con el propósito de despertar el interés de los alumnos; esto es, que los inviten a reflexionar y encontrar diferentes formas de resolver los problemas, así como a formular argumentos que validen los resultados.

Sabemos que no es una tarea sencilla lograr que los estudiantes busquen por su cuenta la manera de resolver los problemas que se les plantean, así como el motivarlos a leer y analizar los enunciados y a trabajar en equipo. Por eso, pensamos en el diseño de una estructura didáctica que favorezca en ellos la expresión de sus ideas y el enriquecimiento de éstas con las opiniones de los demás, desarrollando al mismo tiempo una actitud colaborativa.

De esta manera, propiciaremos el desarrollo de competencias matemáticas, es decir, por un lado que los alumnos construyan conocimientos y habilidades con sentido y, por otro, que desarrollen actitudes y valores.

Además, proponemos una evaluación tipo PISA (Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes) de metas parciales en cada uno de los cinco bloques, en función de los aprendizajes esperados. Los reactivos están diseñados con la idea de que los alumnos pongan en juego los conocimientos y habilidades adquiridos.

También garantizamos el estudio simultáneo de los tres ejes temáticos durante el curso.

Al inicio de cada bloque se propone un proyecto que consiste en una actividad que relaciona uno o más temas por estudiar durante el bloque, con el fin de que los alumnos usen o apliquen sus conocimientos adquiridos previamente. Por lo demás, el número de lecciones en cada bloque corresponde a cada uno de los contenidos.

Esperamos que este libro sea para usted el medio por el cual los alumnos aprendan a disfrutar el estudio de las matemáticas y que realmente adquieran las herramientas necesarias para obtener un mejor desempeño en su vida presente y futura.

Los autores

Tabla de contenidos

CONOCE TU LIBRO

Esta sección está dedicada a mostrarte la estructura y las secciones que conforman tu libro de Matemáticas, así que puedes usarla como guía cuando estudies tus lecciones.

Entrada de bloque

Cada bloque inicia con dos páginas de apertura, en las que conocerás los aprendizajes esperados que habrás de adquirir.

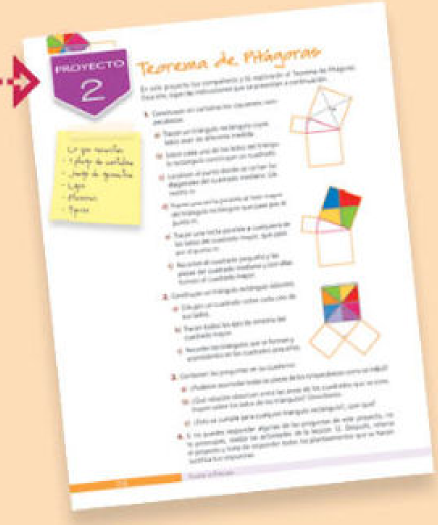
Aquí encontrarás un acertijo matemático que podrás resolver con la ayuda de tus compañeros y tu profesor y una imagen que sirve de apoyo en la resolución del acertijo propuesto.

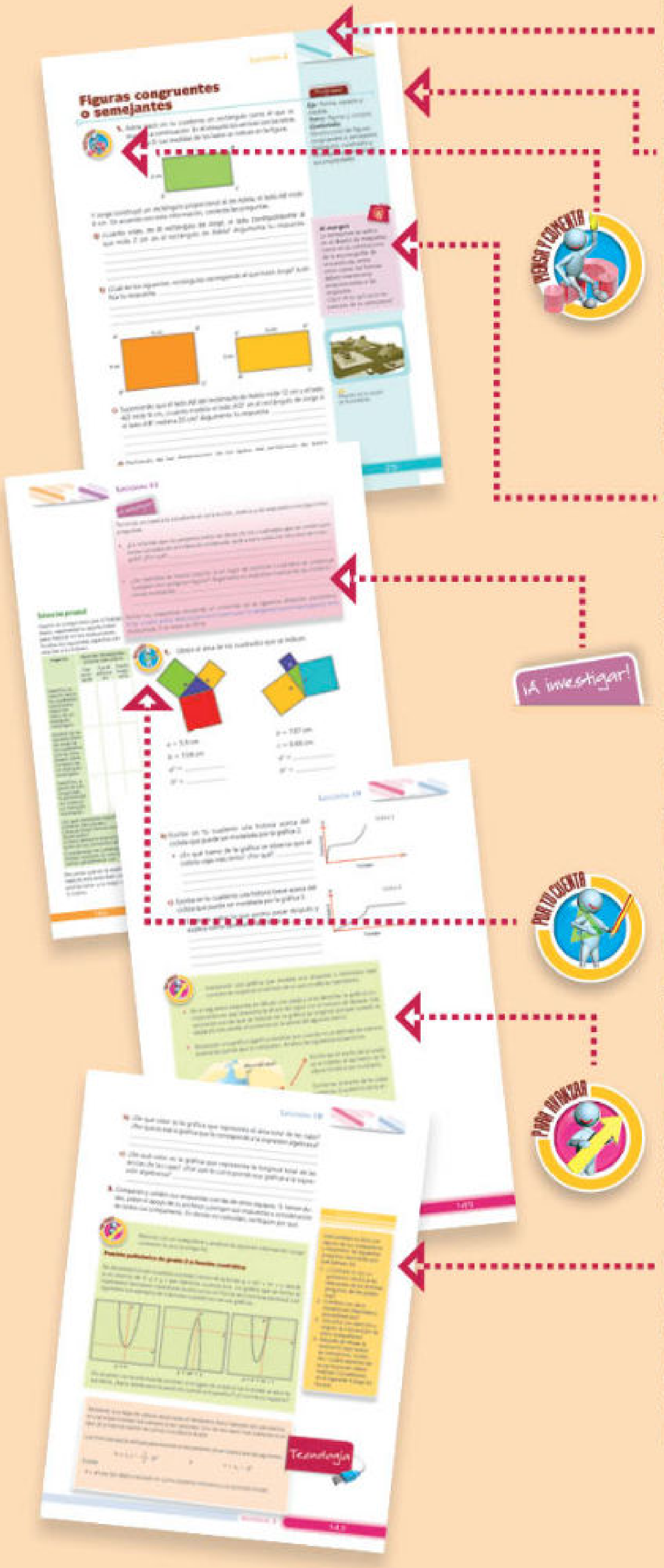
En la entrada de bloque también encontrarás los ejes temáticos acompañados de imágenes representativas de cada uno.

Una introducción que describe de forma general los contenidos que vas a estudiar en el bloque.

Proyecto

Antes de iniciar el estudio de la primera lección de cada bloque, te proponemos llevar a cabo un proyecto que se relaciona con algunos de los contenidos de las lecciones. Estos proyectos didácticos son un conjunto de atractivas experiencias que integran los contenidos de manera articulada y dan sentido al aprendizaje.





Lecciones

Cada bloque está integrado por un número variable de lecciones con una estructura bien definida que describiremos a continuación.

Programa

En esta sección encontrarás el eje temático, el tema y el contenido al que pertenece cada lección.

Piensa y comenta

Comenzarás por analizar y resolver una situación problemática que forma parte de una secuencia y que implica poner en juego los conocimientos y las habilidades previos, al mismo tiempo que adquieres nuevos conocimientos que incluyen justamente los que se quieren desarrollar en la lección.

Al margen

Aquí encontrarás pequeñas cápsulas informativas relacionadas con ciertas ideas matemáticas que se trabajarán en la lección. Discutan la información entre ustedes y si es conveniente coméntenla en clases.

¡A investigar!

Te invitaremos a profundizar en alguno de los aspectos relacionados con el contenido de la lección; para ello, recurrirás a diversas fuentes como libros, sitios de internet o enciclopedias. Estas actividades las puedes realizar en casa o en el laboratorio de cómputo, consultando los acervos de la Biblioteca del Aula o Escolar.

Por tu cuenta

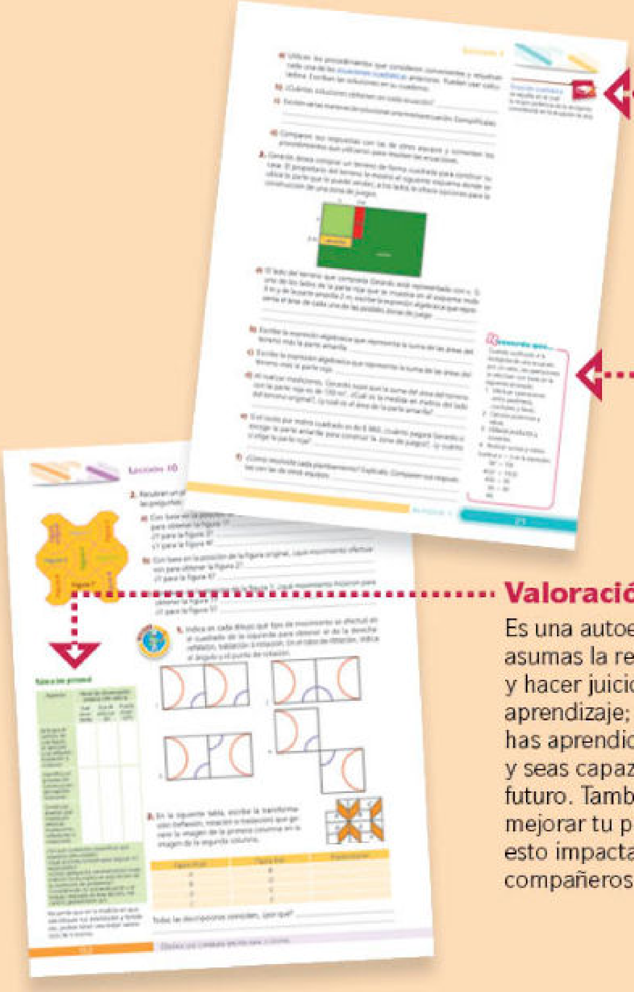
Al finalizar cada lección, te proponemos una serie de problemas y actividades que resolverás en el libro o tu cuaderno.

Para avanzar

En esta sección introducimos, por medio de situaciones problemáticas, estrategias expertas y ejemplos acerca de los contenidos que se desarrollan en la lección.

Coevaluación

Consiste en la evaluación de tu desempeño en equipo en la resolución de una o más situaciones problemáticas, realizada mediante la observación y determinaciones de tus propios compañeros de trabajo para que apliques y reafirmes los conocimientos adquiridos.



Glosario

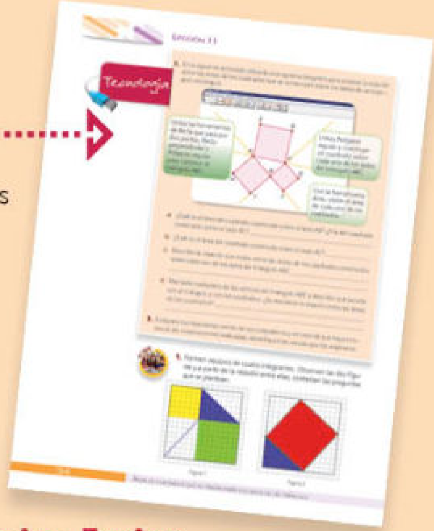
Se incluye el significado de términos o palabras desconocidas a los que se hacen referencia en la lección. Las definiciones se expresan con palabras de fácil comprensión. Además, las palabras definidas se encuentran resaltadas en color azul; esto con la finalidad de que sea más fácil su identificación.

Recuerda que...

Aquí se incluye información acerca de algún concepto matemático o procedimiento desarrollado con anterioridad, en relación con lo estudiado.

Valoración personal

Es una autoevaluación constructiva que implica que asumas la responsabilidad de monitorearte a ti mismo y hacer juicios acerca de los aspectos de tu propio aprendizaje; es decir, que reflexiones acerca de lo que has aprendido, reconozcas tus fortalezas y debilidades, y seas capaz de hacer planes para un mejoramiento futuro. También, implica que te responsabilices de mejorar tu propio proceso y seas consciente de cómo esto impacta en tu aprendizaje y en el desempeño de tus compañeros de equipo en las tareas colaborativas.



Tecnología

Mediante las actividades que proponemos en esta sección explorarás, reafirmarás y validarás los contenidos matemáticos estudiados en la lección, utilizando recursos tecnológicos como la calculadora, la hoja de cálculo electrónica, páginas de internet y el programa *Geogebra*; esto con un propósito exclusivamente educativo.

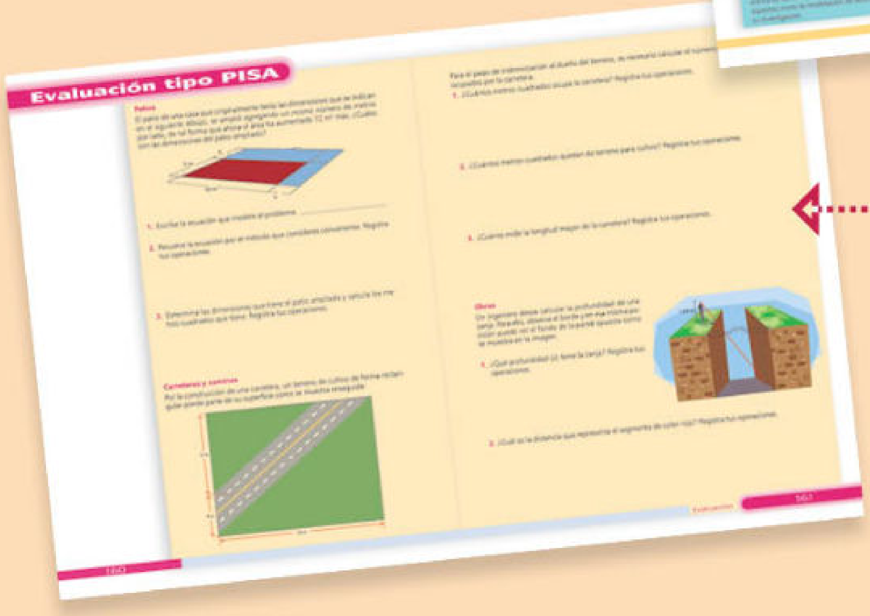
Para tener acceso al programa *Geogebra* te recomendamos descargarlo en la siguiente dirección: www.geogebra.org, así obtendrás una versión gratuita para uso escolar.

Individual, Parejas, Equipo

En cada actividad que proponemos te indicamos, mediante un icono, la modalidad de trabajo con base en la cual te asociarás con tus compañeros.

Conexiones

Al finalizar la última lección de cada bloque, encontrarás esta sección en la que conocerás los vínculos de las matemáticas con diversos campos del conocimiento, la cultura y el arte. También, realizarás actividades que te permitirán analizar la información estudiada.



Evaluación

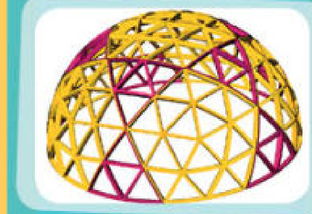
Se trata de una serie de situaciones problemáticas de tipo PISA (Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes), diseñadas en función de los aprendizajes esperados marcados al inicio de cada bloque.

Las competencias matemáticas que se favorecen en los cinco bloques son las siguientes:

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

BLOQUE 1

Sentido numérico y pensamiento algebraico



Forma, espacio y medida

Manejo de la información

Aprendizajes esperados

Al finalizar este bloque podrás:

- Explicar la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Introducción

En este bloque conocerás que existen problemas que pueden resolverse de manera fácil y sencilla utilizando representaciones algebraicas; por ejemplo, aquellos que implican el cálculo de áreas o medidas de lados que se resuelven por medio de ecuaciones cuadráticas. También aprenderás que para estudiar ciertas situaciones es necesario representarlas con gráficas, tablas o incluso con expresiones algebraicas, como, al estudiar si el tamaño de la imagen de proyección de una película depende de la distancia a la que se coloca el proyector, es necesario registrar una serie de datos numéricos que reflejen el tipo de relación que existe entre área y distancia.

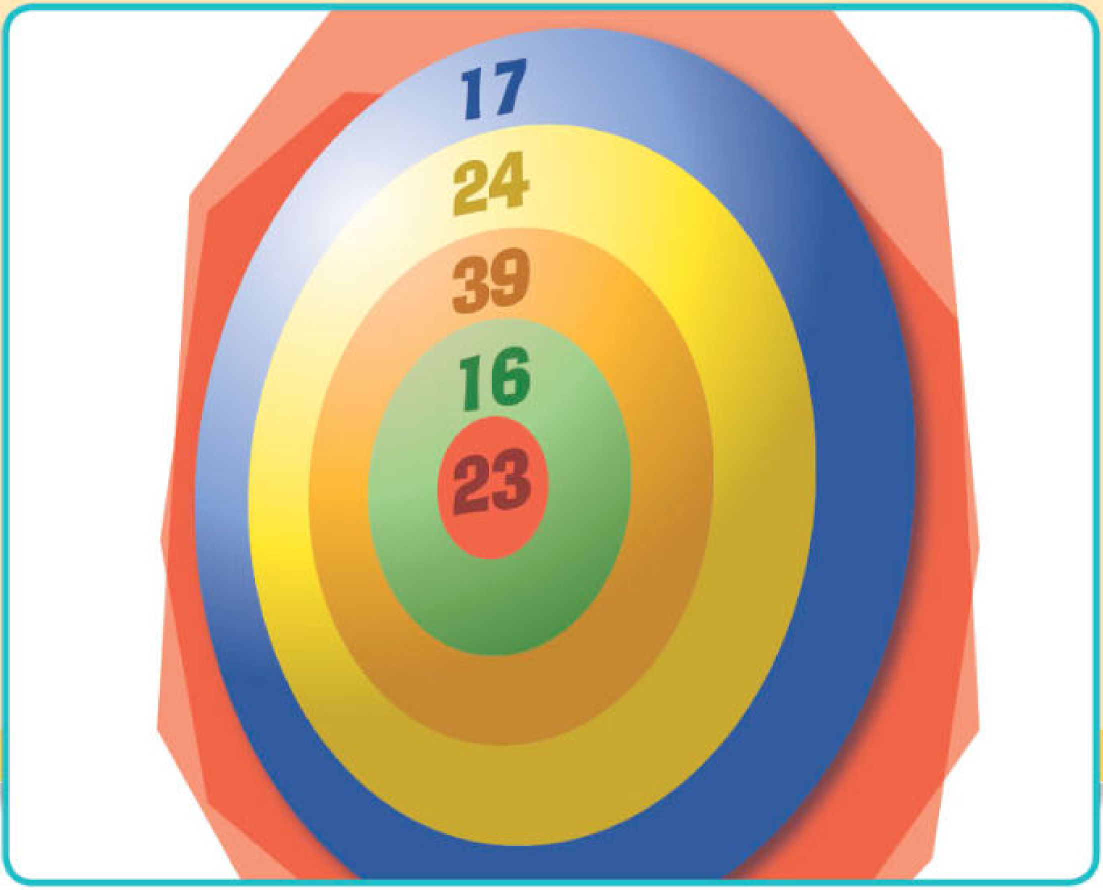
Además, resolverás problemas vinculados con las propiedades de figuras congruentes y semejantes y descubrirás sus aplicaciones en diversos campos del conocimiento, como la utilidad de las propiedades de la semejanza en el diseño de maquetas o en la construcción de escenografías para las películas. Asimismo, descubrirás que ante hechos o fenómenos cuyo resultado no puede predecirse de manera exacta debido a la intervención del azar, existe una medida numérica de la posibilidad de que ocurra, conocida como la probabilidad de un evento.

Por último, tendrás la oportunidad de elaborar una encuesta en la que identificarás las herramientas más convenientes para representar la información recabada.

¡Planteamiento del acertijo!

Juego de dardos

- En una feria hay un juego de dardos cuyo tablero está formado por círculos concéntricos con las siguientes puntuaciones: 16, 17, 23, 24 y 39. Si utilizas 10 dardos, o menos, debes obtener 100 puntos exactos, ¿en qué círculos deberás clavar los dardos?
- ¿Cuál es el mínimo de dardos que puedes usar para obtener 100 puntos exactos?
- Si utilizas exactamente 9 dardos debes obtener 199 puntos, ¿en qué círculos deberás clavar los dardos?
- Proporciona argumentos que validen tus respuestas y compáralos con los de tus compañeros.



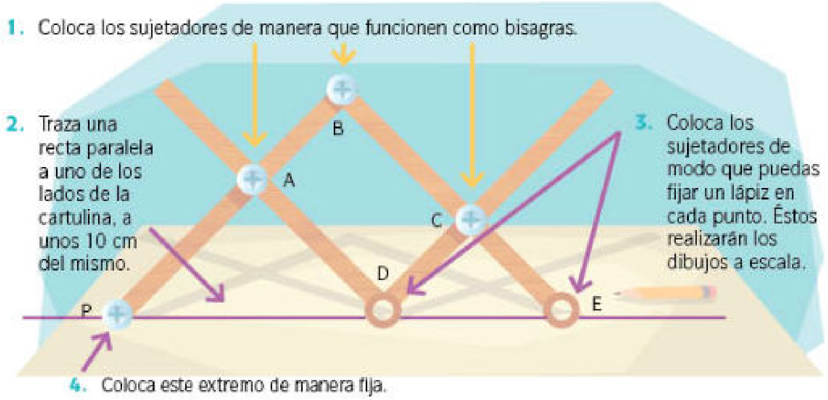
PROYECTO 1

Semejanza de figuras

En este proyecto explorarás uno de los temas que se estudiarán en el bloque, relacionado con la semejanza de figuras. Para ello necesitarás un pantógrafo.

- A partir de la construcción de un pantógrafo podrás ampliar o reducir figuras semejantes. Corta tiras de cartulina como se observa en la imagen y sigue las instrucciones:

Lo que necesitas:
- Tijeras de punta redonda
- Un pliego de cartulina
- Regla
- Lápices de colores
- Sujetadores tipo bisagra



Al colocar los sujetadores se deben cumplir las siguientes condiciones:

- $AB = DC$ y $AD = BC$.
- P, D y E deben ser colineales (es decir, estar sobre la misma recta).

Con el pantógrafo realiza las siguientes actividades:

1. Coloca un dibujo sencillo, como un cuadrado o rectángulo, el cual remarcarás con la punta del lápiz en D. ¿Qué dibuja la punta del lápiz en E?
2. ¿El dibujo resultante es del mismo tamaño que el original? ¿Tiene la misma forma o se ha deformado con respecto al original? ____________
3. ¿Cuál es el cociente de PA entre AB? ¿Cuál es el cociente de un lado de la figura formada por E entre un lado homólogo realizado por D?, ¿cómo son entre sí? ____________
4. Si desearas construir una figura más grande que la que se forma con E semejante a la de D, ¿qué modificaciones harías al pantógrafo? ____________

Si no puedes responder algunas de las preguntas de este proyecto, no te preocupes, realiza las actividades de las lecciones 2 y 3. Después, retoma el proyecto y trata de responder de nuevo todas las preguntas. Justifica tus respuestas.

Problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas

Programa

Eje: *Sentido numérico y pensamiento algebraico*
Tema: *Patrones y ecuaciones*
Contenido: *Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales y operaciones inversas.*

Piensa y comenta

Con las ecuaciones cuadráticas se pueden modelar situaciones de diversa índole, como el movimiento que describe una bola de béisbol al ser bateada o el que describe un balón de fútbol americano al ser lanzado, así como las relaciones métricas entre cierto tipo de superficies y sus dimensiones.

Individual

1. Carmen está interesada en comprar un terreno, por lo que decide consultar la sección de anuncios clasificados del periódico. Ahí encuentra en siguiente anuncio:

Al llamar por teléfono le informan que el largo del terreno es de 300 m más de lo que mide de ancho.

a) Con esta información, ¿será posible determinar las medidas del terreno? ¿Por qué? ____________

b) Si se representa con x la medida del ancho del terreno, ¿cuál es la expresión algebraica que representa el largo? ____________

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área del terreno?

d) ¿Qué información representa la expresión algebraica $x(x + 300) = 400\,000$ derivada del terreno de venta? ____________

e) ¿Cuál es el valor de x? ____________

f) ¿Cuánto mide de largo y de ancho el terreno? ____________

g) Compara tus respuestas con las de tus compañeros y comenta la forma en que determinaste el valor de x. Escribe en tu cuaderno el proceso de resolución del problema.

2. Pensé un número, lo elevé al cuadrado; después, a este número le resté nueve. El resultado final fue 112. ¿Cuál fue el número que pensé? Analiza el problema y resuélvelo utilizando la siguiente ecuación.

$$x^2 - 9 = 112$$

a) ¿Cuál es el valor de x^2?, ¿y si x fuera -4? ____________

Al margen
La solución de las ecuaciones de segundo grado fue introducida en Europa por el matemático y astrónomo judeoespañol Abraham Bar Hiyya (1065-1136), en su obra *Liber embadorum*. Hiyya escribió varias obras de aritmética, geometría, astronomía y música.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Investiga cómo se conoce comúnmente a la fórmula que se presenta en la imagen y para qué tipo de ecuaciones se utiliza.

b) Si el valor de x es 3, ¿cuál es el valor de $x^2 - 9$?, ¿y si fuera 10? ______

c) ¿Cuál valor de x cumple con la ecuación $x^2 - 9 = 112$? ______

d) ¿Cómo lo obtuviste? Explica tu procedimiento. ______

e) ¿Habrá otro valor que cumpla con la ecuación?, ¿cuál? ______

Ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros.

f) Completa las siguientes tablas para verificar los valores que obtuviste.

Ecuación $x^2 - 9 = 112$		
Valor de x	Evaluación de la expresión	Valor de $x^2 - 9$
8	$8^2 - 9$	55
9	$9^2 - 9$	
10	$10^2 - 9$	91
11	$11^2 - 9$	
12	$12^2 - 9$	135
13	$13^2 - 9$	

Ecuación $x^2 - 9 = 112$		
Valor de x	Evaluación de la expresión	Valor de $x^2 - 9$
−8	$(-8)^2 - 9$	
−9		
−10		
−11		
−12	$(-12)^2 - 9$	135
−13		

g) Sugiere alguna otra manera para solucionar esta ecuación. Explícala y compárala con la de tus demás compañeros.

3. Un centro comercial está ubicado en un terreno cuadrado. Una parte cuadrada del terreno, de 30 m por lado, se ocupa como estacionamiento y en el resto se ubican los locales de ventas con un área total de 9 025 m².

a) ¿Cuánto mide por lado todo el terreno? ______

b) ¿Cuál es el área total? ______ ¿Y su perímetro? ______

c) Escribe una ecuación que te permita calcular el valor del lado del terreno. Compara la ecuación que anotaste con la de tus compañeros. ¿Encuentran alguna diferencia? Si es así, ¿se trata de ecuaciones equivalentes? ¿Cómo podrías demostrarlo? ______

d) Describe un procedimiento para resolver dicha ecuación. ______

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en el llenado de la tabla enunciando los problemas que se relacionan con las expresiones algebraicas mostradas en la misma?
2. ¿Comparó sus respuestas con las de otros equipos?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención en la discusión acerca de los procedimientos que utilizaron sus compañeros?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su pareja, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

1. En equipos de cuatro integrantes completen la tabla. Para ello, relacionen algunas expresiones algebraicas con su traducción a lenguaje común y viceversa.

Lenguaje común	Expresión algebraica
Un número elevado al cuadrado es igual a 196.	$x^2 = 196$
	$b^2 + 58 = 179$
	$15 + 2x^2 = 593$
El cuadrado de un número más setenta y nueve es igual a setecientos cincuenta y cinco.	
	$25 = \frac{100}{x^2}$

a) Utilicen los procedimientos que consideren convenientes y resuelvan cada una de las ecuaciones cuadráticas anteriores. Pueden usar calculadora. Escriban las soluciones en su cuaderno.

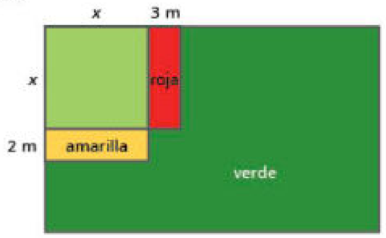
b) ¿Cuántas soluciones obtienen en cada ecuación? ______

c) Existen varias maneras de solucionar una misma ecuación. Ejemplifícalas. ______

d) Comparen sus respuestas con las de otros equipos y comenten los procedimientos que utilizaron para resolver las ecuaciones.

Ecuación cuadrática es aquella en la cual la mayor potencia de la incógnita considerada en la ecuación es dos.

1. Gerardo desea comprar un terreno de forma cuadrada para construir su casa. El propietario del terreno le mostró el siguiente esquema donde se ubica la parte que le puede vender; a los lados le ofrece opciones para la construcción de una zona de juegos.



a) El lado del terreno que compraría Gerardo está representado con x. Si uno de los lados de la parte roja que se muestra en el esquema mide 3 m y de la parte amarilla 2 m, escribe la expresión algebraica que representa el área de cada una de las posibles zonas de juego. ______

b) Escribe la expresión algebraica que representa la suma de las áreas del terreno más la parte amarilla. ______

c) Escribe la expresión algebraica que representa la suma de las áreas del terreno más la parte roja. ______

d) Al realizar mediciones, Gerardo supo que la suma del área del terreno con la parte roja es de 130 m². ¿Cuál es la medida en metros del lado del terreno original?, ¿y cuál es el área de la parte amarilla? ______

e) Si el costo por metro cuadrado es de $ 980, ¿cuánto pagará Gerardo si escoge la parte amarilla para construir la zona de juegos?, ¿y cuánto si elige la parte roja? ______

f) ¿Cómo resolviste cada planteamiento? Explícalo. Comparte tus respuestas con las de otros compañeros. ______

Recuerda que...

Cuando sustituyes la incógnita de una ecuación por un valor, las operaciones se efectúan según la siguiente jerarquía:

1. Efectuar operaciones entre paréntesis, corchetes y llaves.
2. Calcular potencias y raíces.
3. Obtener productos y cocientes.
4. Realizar sumas y restas.

Sustituir $x = 3$ en la expresión:

$4x^2 + 10x$

$4(3)^2 + 10(3)$

$4(9) + 30$

$36 + 30$

66

1. En su cuaderno, realicen las siguientes actividades.

   a) Planteen un problema que se pueda resolver con cada una de las siguientes ecuaciones.

   - $x\,(x + 8) = 308$
   - $n^2 + n = 420$
   - $3m^2 + m = 30$
   - $x^2 - 5x = 7.5$

   b) Resuelvan la ecuación con procedimientos personales u operaciones inversas.

   c) Comprueben resultados y compárenlos con los de sus compañeros.

¡A investigar!

Las ecuaciones de segundo grado tienen una aplicación interesante en la física, como el estudio del movimiento uniformemente acelerado. Ingresa a la página de internet http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cinematica/rectilineo/rectilineo.htm#acelerado (Consulta: 13 de enero de 2017) y analiza la información que se te proporciona.

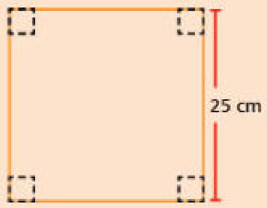
- ¿Cómo es la velocidad en el movimiento uniformemente acelerado?, ¿y la aceleración? ______________________

Revisa el problema del viaje del tren y comenta los resultados con tus compañeros.

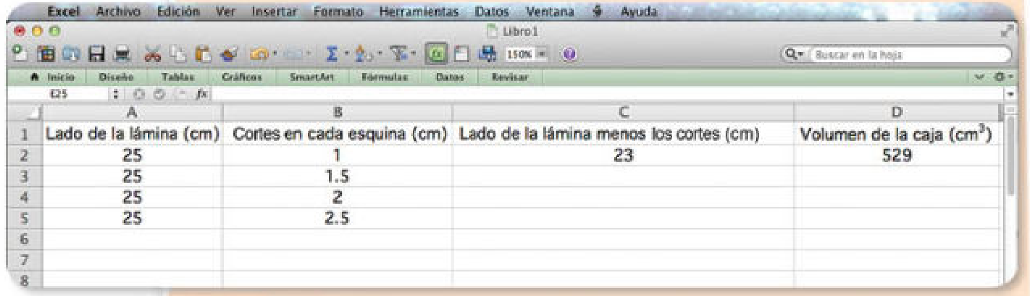
Tecnología

Con la ayuda de una hoja de cálculo y de tus compañeros resuelve el siguiente problema.

1. Una caja sin tapa con base cuadrada se construye a partir de una lámina cuadrada de aluminio de 25 cm por lado, cortando pequeños cuadrados en las esquinas.



2. Construye una hoja de cálculo como la siguiente, introduciendo las fórmulas necesarias para obtener los valores indicados



	A	B	C	D
1	Lado de la lámina (cm)	Cortes en cada esquina (cm)	Lado de la lámina menos los cortes (cm)	Volumen de la caja (cm^3)
2	25	1	23	529
3	25	1.5		
4	25	2		
5	25	2.5		
6				
7				
8				

Tecnología

a) ¿Cuál es el volumen de la caja cuando su altura es de 2 cm? ¿Y cuando mide 4 cm? ¿Se duplica el volumen? ¿Por qué? ______________________

b) ¿Qué fórmula introdujiste en la celda C2 para obtener el valor ahí escrito?, ¿y en la celda D2? Escríbela y cópiala hacia abajo. ______________________

c) ¿El volumen de las cajas que se forman es directamente proporcional a la altura?, ¿por qué? ______________________

d) Aumenta la medida del corte que se hace en las esquinas y obtén los valores para las demás columnas. ¿Cuál es el mayor volumen que puede tener la caja? ______________________

e) Si se requiere que la caja tenga un volumen de 168 cm^3, ¿cuánto deben medir por lado los pequeños cuadrados que se van a cortar? ______________________

f) ¿Cuál será el volumen de la caja cuando el corte que se hace mide 10 cm? ______________________

g) ¿Cuánto mide el área de la base de la caja si el volumen es de 1 125 m^3? ¿Y cuánto mide por lado cada cuadrado que se cortó en las esquinas? ______________________

3. Compara tu hoja de cálculo y tus respuestas con otros compañeros.

Para avanzar

Una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones o raíces y en su forma general se representa así: $ax^2 + bx + c = 0$.

Donde:
a = coeficiente del término de segundo grado
x = incógnita
b = coeficiente del término lineal
c = término independiente o constante

Si el coeficiente b es cero, la ecuación se convierte en una de la forma $ax^2 + bx = 0$ y se llama ecuación incompleta, la cual tiene dos soluciones simétricas.

$$X_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}} \qquad X_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si el término c es cero, la ecuación se convierte en una de la forma $ax^2 + bx = 0$ y se llama ecuación incompleta; tiene dos soluciones (una es cero y la otra es $-\frac{b}{a}$).

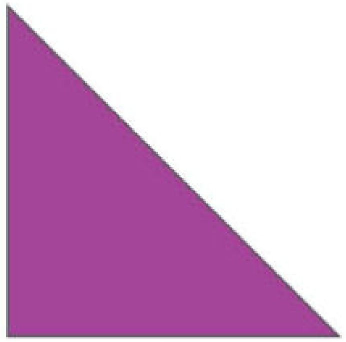
Si el coeficiente b y el término c son cero, la ecuación se convierte en una de la forma $ax^2 = 0$ y se llama ecuación incompleta; tiene una solución que es cero.

1. Analiza la información dada; si tienes dudas, extérnalas en grupo. Luego, teniendo como base la información anterior, analiza y resuelve lo que se indica en las actividades de la siguiente sección.

1. El producto de dos números consecutivos es 812, ¿cuáles son los números? Recuerda que el consecutivo de x es $x + 1$.

2. Si en un triángulo rectángulo la altura es 3 cm mayor que la base y el área es 35 cm², ¿cuánto miden, respectivamente, la base y la altura del triángulo? ______

$x + 3$



x

3. Utilizando los procedimientos que consideres convenientes, resuelve las siguientes ecuaciones no lineales.

a) $3x^2 = 75$

b) $x^3 = 125$

c) $y^3 + y = 30$

d) $a^3 - a = 60$

e) $x^2 + 25x = 116$

4. Calcula las dimensiones de los lados del rectángulo que se muestra a continuación, si su área es de 33 cm².

m

$m + 8$

5. Una vez que hayas concluido los problemas anteriores, compara con tus compañeros tus respuestas y procedimientos, ¿todos tomaron los conceptos planteados en la sección *Para avanzar* como información relevante?, ¿por qué? ______

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Puedo resolver problemas que implican uso de ecuaciones sencillas utilizando procedimientos personales.			
Resuelvo problemas que implican uso de ecuaciones sencillas utilizando operaciones inversas.			
Planteo problemas que involucran ecuaciones cuadráticas.			
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades? ¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño? ¿Cómo apliqué los razonamientos matemáticos involucrados en esta lección en la resolución de problemas? Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:			

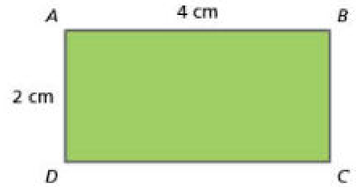
Recuerda que en la medida en que identifiques tus debilidades y fortalezas, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

Figuras congruentes o semejantes

Programa

Eje: *Forma, espacio y medida*
Tema: *Figuras y cuerpos*
Contenido:
Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.

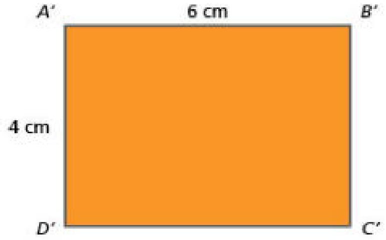
1. Adela trazó en su cuaderno un rectángulo como el que se muestra a continuación. En él nombró los vértices con las letras A, B, C y D. Las medidas de los lados se indican en la figura.

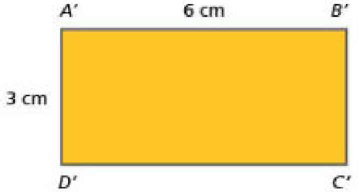


Y Jorge construyó un rectángulo proporcional al de Adela, en el que el lado AB mide 6 cm. De acuerdo con esta información, contesta las preguntas.

a) ¿Cuánto mide, en el rectángulo de Jorge, el lado correspondiente al que mide 2 cm en el rectángulo de Adela? Argumenta tu respuesta.

b) ¿Cuál de los siguientes rectángulos corresponde al que trazó Jorge? Justifica tu respuesta. ______





c) Suponiendo que el lado AB del rectángulo de Adela mide 12 cm y el lado AD mide 9 cm, ¿cuánto medirá el lado $A'D'$ en el rectángulo de Jorge si el lado $A'B'$ mide 20 cm? Argumenta tu respuesta. ______

d) A partir de las dimensiones de los lados del rectángulo de Adela, completa la tabla de la página que sigue para determinar los rectángulos proporcionales que puede trazar Jorge.

Al margen
La *semejanza* se aplica en el diseño de maquetas, como en la construcción de la escenografía de una película, entre otros casos; las formas deben mantenerse proporcionales a las originales.
¿Qué otras aplicaciones conoces de la semejanza?

Maqueta de la ciudad de Tenochtitlan.

Rectángulo de Adela	
$\overline{AB}$ = 4 cm	
$\overline{AD}$ = 2 cm	

Rectángulo de Jorge	
$\overline{A'B'}$	$\overline{A'D'}$
8 cm	
9 cm	
12 cm	
	11 cm
	16 cm
35 cm	
	20 cm
3 cm	
2 cm	
1 cm	

e) Compara tus respuestas con las de tus compañeros y reflexiona acerca de la estrategia usada para obtener las dimensiones de los lados faltantes.

2. Alejandro solicitó una ampliación de la siguiente fotografía, cuyas medidas son 6 cm por 4.5 cm. Él quiere que el lado que mide 6 cm, sea de 9 cm.

Puente de Londres

a) Si la fotografía ampliada debe ser proporcional a la fotografía original, ¿cuánto debe medir el otro lado en la fotografía ampliada? Justifica tu respuesta. ______

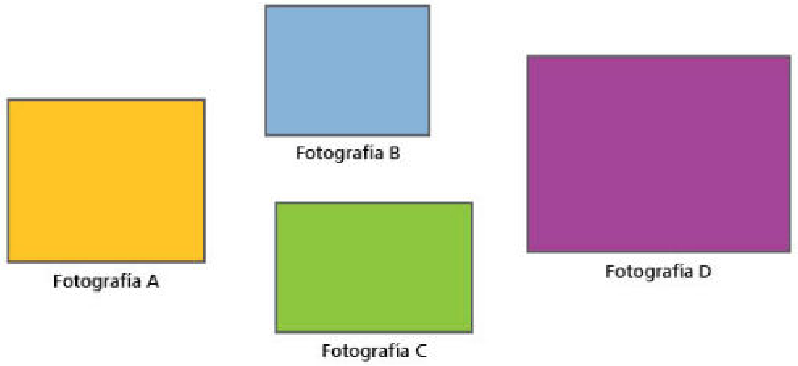
b) Divide la medida de cada lado de la fotografía ampliada entre la medida del lado correspondiente de la fotografía original. ¿Qué tienen en común los cocientes obtenidos? ______

c) ¿Qué sucedería con las ampliaciones de las fotografías si los lados no fueran proporcionales a los de la original? Argumenta tu respuesta.

______

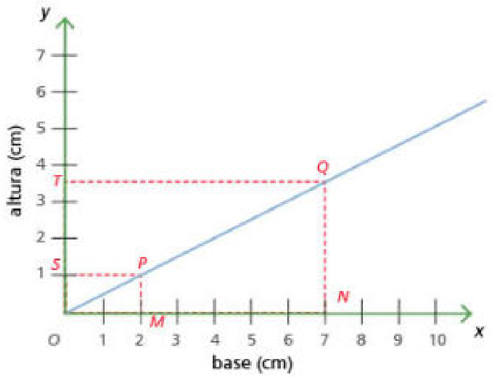
d) Observa los rectángulos de la página que sigue e indica en cuáles de ellos su tamaño correspondería a una reducción de la fotografía original en la que los lados correspondientes son proporcionales. Justifica tu respuesta.

______



e) Compara tus respuestas con las de tus compañeros y establece acuerdos en caso de que encuentres algunas diferencias.

3. En el plano cartesiano de la derecha se trazaron algunos rectángulos. Analízalos y contesta las preguntas.



a) ¿Cuánto miden los lados del rectángulo *SPMO*? ¿Cuánto miden los lados del rectángulo *TQNO*? ______

b) ¿Qué relación hay entre las diagonales *OP* y *OQ* de los dos rectángulos? ______

c) Registra en la siguiente tabla las medidas de los lados de los rectángulos del plano cartesiano y traza otros rectángulos hasta completar la tabla.

Rectángulo	Base (cm)	Altura (cm)
SPMO	2	1
TQNO		

d) Compara tus respuestas con las de tus compañeros y argumenta los resultados obtenidos en la tabla.

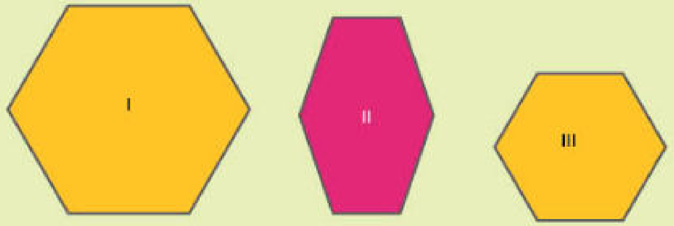
Proporcionalidad es una relación entre magnitudes medibles. La proporción muestra los tamaños relativos de dos o más valores.

Para avanzar

Las siguientes fotografías son semejantes entre sí, pues aunque no tienen las mismas dimensiones, sí tienen la misma proporción.



Dos *polígonos* son *semejantes* si sus lados correspondientes son proporcionales, y los ángulos correspondientes son iguales. Las figuras I y III son semejantes, ambos son hexágonos regulares. El polígono II no tiene los lados correspondientes proporcionales ni los ángulos correspondientes iguales a los otros dos.

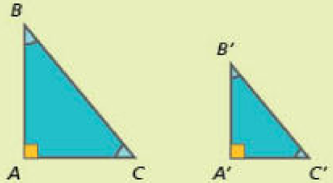


1. ¿Todos los hexágonos regulares son semejantes? ¿Todos los hexágonos irregulares son semejantes? ¿Todos los rectángulos son semejantes? Comenten sus respuestas en clase.

Dos triángulos son semejantes si los ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales.

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = k$$

$\angle A = \angle A'$ $\quad \angle B = \angle B'$ $\quad \angle C = \angle C'$



A k se le llama *razón de semejanza*. El símbolo de semejanza es ~.

En equipo

1. Existen criterios que permiten determinar si dos triángulos son semejantes. Para identificarlos, reúnanse en equipos de cuatro integrantes y lleven a cabo las siguientes actividades.

a) Primero, construyan los triángulos cuyos ángulos interiores midan:

60°, 60° y 60° 50°, 80° y 50° 30°, 60° y 90°

b) Comparen los triángulos que obtuvieron con los de los otros equipos y agrúpenlos de acuerdo con las medidas de sus ángulos interiores. ¿Los triángulos de cada grupo tienen la misma forma? Argumenten su respuesta. ______________________________

2. De cualquiera de los tres grupos de triángulos, elijan dos de ellos y realicen lo siguiente:

a) Nombren los vértices de uno de los triángulos con A, B, C y los del otro con A', B', C'. Ahora, nombren los lados de los triángulos con a, b, c y a', b', c', respectivamente.

b) Midan cada uno de los lados de ambos triángulos y registren los datos que se piden en la siguiente tabla.

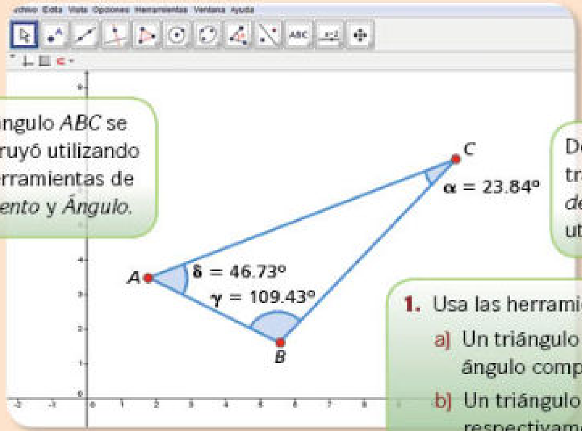
Triángulo	Lados			Cocientes		
ABC	a =	b =	c =	$\frac{a}{a'}$ =	$\frac{b}{b'}$ =	$\frac{c}{c'}$ =
$A'B'C'$	a' =	b' =	c' =	$\frac{a}{b}$ =	$\frac{a'}{b'}$ =	

c) ¿Son proporcionales los lados de los triángulos ABC y $A'B'C'$? ¿Los triángulos son semejantes? Argumenten sus respuestas y verifíquenlo con otro par de triángulos de otro grupo. ______________________________

d) Comparen sus respuestas con las de los demás equipos y reflexionen en torno a los criterios de semejanza de triángulos.

Tecnología

En la siguiente actividad utilizarás el programa *Geogebra* para analizar algunas propiedades de las figuras congruentes y semejantes.



El triángulo ABC se construyó utilizando las herramientas de *Segmento* y *Ángulo*.

Dos de los lados del triángulo se trazaron utilizando la opción *Segmento de longitud fija* y para el tercer lado se utilizó *Segmento entre dos puntos*.

1. Usa las herramientas mencionadas y construye lo siguiente:
   a) Un triángulo en el que uno de lados mida 10 cm, otro 15 cm y el ángulo comprendido entre ellos sea de 30°.
   b) Un triángulo en el que dos de sus ángulos midan 30° y 70°, respectivamente, y el lado comprendido entre ellos mida 6 cm.

Tecnología

2. Describe el procedimiento que utilizaste para trazar cada uno de los triángulos. Manipula alguno de los vértices y analiza lo que ocurre con los lados y los ángulos.

3. ¿Cuánto mide el tercer lado del primer triángulo que construiste? ¿Cuánto miden los otros dos ángulos? Justifica tus respuestas.

4. Compara tus construcciones con las de los demás equipos. ¿Todos los triángulos tienen la misma forma? ¿Son triángulos semejantes? Argumenta tus respuestas.

5. Analiza las siguientes preguntas y argumenta la validez de tus respuestas. Para ello, haz construcciones con *Geogebra*.

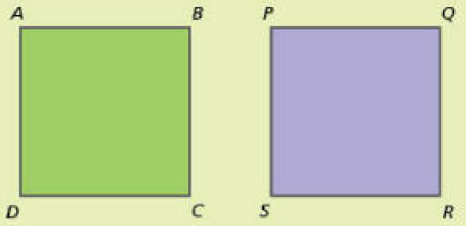
   a) Si dos triángulos tienen las mismas medidas en dos de sus lados y el mismo ángulo comprendido entre ellos, ¿puedes afirmar que son semejantes sin conocer la medida del tercer lado y la de los otros dos ángulos?

   b) Si dos triángulos tienen las mismas medidas en dos de sus ángulos y el lado común a dichos ángulos mide lo mismo, ¿puedes afirmar que son semejantes sin conocer la medida del tercer ángulo y la medida de los otros dos lados?

6. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y para el caso de que haya diferencias en las construcciones realizadas, identifica las condiciones que dieron origen a ellas.

Dos figuras son *congruentes si tienen la misma forma y tamaño*. El símbolo de congruencia es ≅.

□*ABCD* ≅ □*PQRS*



1. Analiza cada uno de los siguientes enunciados e indica si son falsos o verdaderos. Para ello, proporciona argumentos que validen tu respuesta.

   a) Cualquier par de triángulos equiláteros son semejantes.

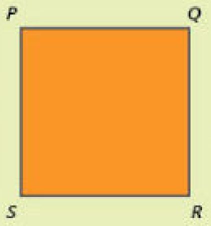
   b) Cualquier par de triángulos equiláteros son congruentes.

   c) Si dos triángulos son congruentes, entonces son semejantes.

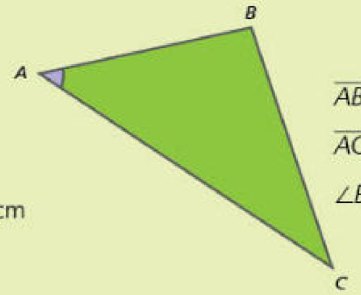
   d) Si dos triángulos son semejantes, entonces son congruentes.

   e) Compara tus respuestas con las de tus compañeros y determina en qué casos dos figuras son congruentes y en qué casos son semejantes.

2. Para cada una de las siguientes figuras, construye una figura congruente y una semejante y contesta las preguntas que se te plantean.



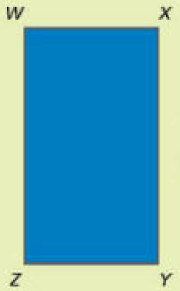
$\overline{PQ} = 2.5$ cm



$\overline{AB} = 3$ cm

$\overline{AC} = 5$ cm

$\angle BAC = 45°$



$\overline{WX} = 3.5$ cm

$\overline{XY} = 2$ cm

   a) Si en el triángulo *ABC* duplicaras las longitudes de *AB* y *AC* y el ángulo fuera de la misma medida, ¿el nuevo triángulo sería semejante al que construiste? ¿Sería semejante al triángulo *ABC*? Argumenta tus respuestas.

   b) Si en el cuadrado *PQRS* duplicaras la longitud de su lado, ¿sería semejante al cuadrado que construiste? ¿Y si la elevaras al cuadrado? Justifica tus respuestas.

   c) Si sumaras la misma cantidad a las dimensiones del rectángulo *WXYZ*, ¿el rectángulo obtenido sería semejante al que construiste? Justifica tu respuesta.

   d) Compara con tus compañeros tus respuestas y construcciones que realizaste y describe las estrategias utilizadas en la actividad.

Coevaluación

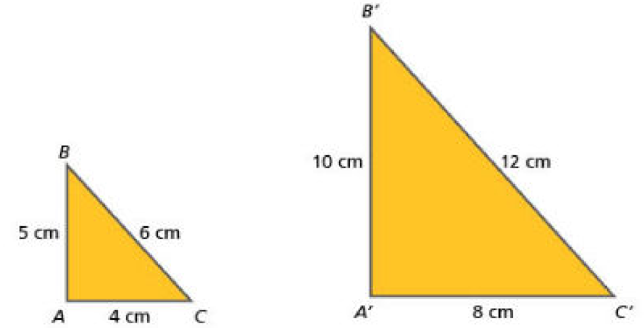
Intercambia tu libro con alguno de tus compañeros y responde las siguientes preguntas, explicando por qué piensan así:

1. ¿Logró identificar la semejanza de dos triángulos, rectángulos o cuadrados?
2. ¿Identificó las propiedades para identificar dos figuras congruentes o semejantes?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros?
4. ¿Qué aspectos de su participación debe mejorar?

1. Contesta lo que se pide en cada caso.

   a) ¿Son semejantes los triángulos *ABC* y *A'B'C'*? ¿Cómo son entre sí los ángulos de los dos triángulos? ____________

   b) ¿Cuál es la razón de semejanza? ____________



   c) La razón de semejanza entre dos triángulos es 4. Los lados del primero miden 6 cm, 9 cm y 12 cm, ¿cuáles son las medidas del segundo? ____________

2. Traza en tu cuaderno los polígonos que se indican y, por cada uno de ellos, otro semejante. En cada caso, escribe en las siguientes líneas cuál es la razón de semejanza.

   a) Un rectángulo con una base de 9 cm y una altura de 5 cm. ____________

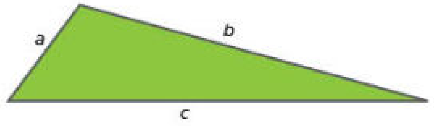
   b) Un triángulo cuyos lados midan 4 cm, 9 cm y 11 cm. ____________

   c) Un cuadrado que mida 4 cm de lado. ____________

   d) Un triángulo cuyos ángulos interiores midan 70°, 50° y 60°. ____________

3. Con base en la razón de semejanza que se indica, obtén la medida de los lados de los triángulos semejantes al que se muestra:

Razón de semejanza	Lado *a*	Lado *b*	Lado *c*
0.5			
1.5			
2			
3			
3.5			



a = 2 cm; b = 6 cm; c = 7 cm

4. Comenta tus respuestas con tus compañeros e identifica los errores que cometieron. En caso de ser necesario, retoma las actividades de la lección.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Identifico triángulos, rectángulos o cuadrados semejantes o congruentes.			
Dada una figura, construyo otra que sea semejante o congruente con ella.			
A partir de la razón de semejanza, construyo una figura semejante a otra.			
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades? ¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño? ¿Cómo demostré disposición para el estudio de los contenidos de esta lección? Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:			

Recuerda que en la medida en que realices esta actividad con honestidad podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

Criterios de congruencia y semejanza de triángulos

En nuestro entorno existen construcciones, objetos, obras de arte o diseños publicitarios, en los que podemos observar figuras iguales en forma y tamaño a las que se conocen como figuras congruentes.

1. ¿Qué información mínima es necesaria para construir triángulos congruentes o semejantes? Averígualo; para ello, traza triángulos en una hoja blanca de acuerdo con cada una de las condiciones que se proponen.

   a) En el primer triángulo, dos de sus lados deberán medir lo mismo que los siguientes segmentos:

   6 cm

   4 cm

   b) En el segundo triángulo, sus lados tendrán las medidas de los siguientes segmentos:

   7 cm

   5 cm

   3 cm

2. A partir de los triángulos que trazaste, contesta las siguientes preguntas.

   a) ¿Cuánto mide el tercer lado del primer triángulo que construiste? ____________

   b) Compara el primer triángulo que trazaste con los de algunos compañeros. En los triángulos que construyeron tus compañeros, ¿el tercer lado mide lo mismo que el tercer lado de tu triángulo? ____________

   c) Compara con tu grupo el segundo triángulo que trazaste, ¿todos construyeron el mismo triángulo? ____________

   d) Si las medidas de los tres lados de dos triángulos son iguales, ¿puedes afirmar que los dos triángulos son iguales sin conocer las medidas de sus ángulos? Justifica tu respuesta. ____________

   e) Si las medidas de los tres ángulos interiores de dos triángulos son iguales, ¿puedes afirmar que los dos son iguales sin conocer las medidas de sus lados? Explica tu respuesta. ____________

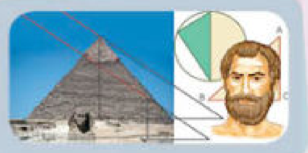
   f) Compara tus respuestas con otros compañeros. Para el caso de que haya diferencias, verifica por qué con todo el grupo.

Programa

Eje: *Forma, espacio y medida*
Tema: *Figuras y cuerpos*
Contenido: *Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.*

Al margen

En cierta ocasión, en el río Nilo, un sacerdote le preguntó a Tales de Mileto cuál era la altura de la pirámide del rey Khufú (la pirámide de Keops). Tales se acostó en la arena y determinó la longitud de su propio cuerpo. Atónito, el sacerdote le preguntó: "¿Qué haces?", y él contestó: "Me pondré en un extremo de la línea que marca mi cuerpo en la arena hasta que mi sombra sea igual de larga. En ese instante, la sombra de la pirámide medirá tantos pasos como la altura de ésta".



Pirámide de Keops en Egipto.

Si las caras de la pirámide tienen forma de triángulo equilátero, ¿las cuatro caras son congruentes o semejantes? ¿Por qué?

1. Formen equipos de cuatro integrantes y en papel milimétrico tracen un primer triángulo, de manera que uno de sus lados mida 10 cm, otro 15 cm y el ángulo comprendido entre ellos sea de 30°.

2. Tracen un segundo triángulo de manera que uno de sus ángulos mida 70° y otro 30° y que el lado comprendido entre ellos mida 6 cm.

   a) ¿Cuánto mide el tercer lado del primer triángulo que trazaron?, ¿cuánto miden los otros dos ángulos? ____________________

   b) Comparen sus trazos con los de otros equipos, ¿trazaron todos los mismos triángulos? ¿Por qué? ____________________

   c) Con las condiciones dadas para el primer triángulo, ¿cuántos triángulos distintos se pueden trazar? Justifiquen sus respuestas. ____________________

   d) Con las condiciones dadas para el segundo triángulo, ¿cuántos triángulos distintos se pueden trazar? Argumenten sus respuestas. ____________________

   e) Si dos triángulos tienen las mismas medidas en dos de sus lados y el mismo ángulo comprendido entre ellos, ¿pueden afirmar que son iguales sin conocer la medida del tercer lado y de los otros dos ángulos? Justifiquen sus respuestas. ____________________

   f) Si dos triángulos tienen las mismas medidas en dos de sus ángulos y el lado común a dichos ángulos mide lo mismo, ¿pueden afirmar que son iguales sin conocer la medida del tercer ángulo y la medida de los otros dos lados? Argumenten su respuesta. ____________________

   g) Comparen sus respuestas con las de los otros equipos. Si tienen dudas, coméntenlas con su profesor y con todo el grupo aclárenlas.

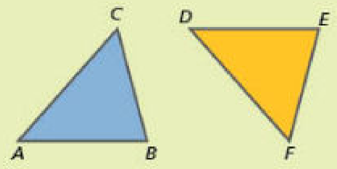
Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en la construcción de los triángulos?
2. ¿Verificó con otros equipos sus respuestas?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de otros compañeros?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su compañero, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

Analicen la siguiente información y compárenla con las afirmaciones y trazos que hicieron anteriormente. Luego, respondan lo que se pregunta.

Si los tres lados de un triángulo son, respectivamente, iguales a los tres de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes. Criterio *LLL* (lado–lado–lado)



Si se cumple que

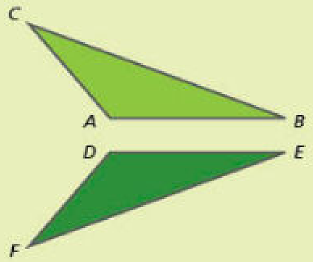
$\overline{AB} = \overline{DE}$

$\overline{BC} = \overline{EF}$

$\overline{AC} = \overline{DF}$

Entonces, el $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido entre ellos son, respectivamente, iguales a dos lados de otro triángulo y el ángulo comprendido entre ellos, entonces los dos triángulos son congruentes. Criterio *LAL* (lado-ángulo-lado)



Si se cumple que

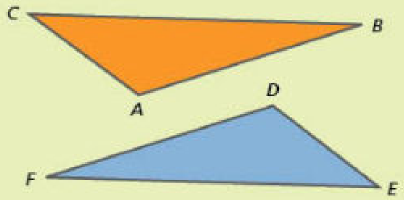
$\overline{AB} = \overline{DE}$

$\overline{AC} = \overline{DF}$

$\angle ABC = \angle EDF$

Entonces, el $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

Si un lado de un triángulo y los ángulos adyacentes a él son, respectivamente, iguales a dos lados del otro triángulo y el ángulo comprendido entre ellos, entonces los dos triángulos son congruentes.



Si se cumple que

$\overline{AB} = \overline{DE}$

$\angle BAC = \angle EDF$

$\angle ABC = \angle DEF$

Entonces, el $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

a) ¿Coinciden los criterios de congruencia con las conclusiones a las que ustedes llegaron? ____________________

b) Para determinar la congruencia de dos triángulos sólo es necesario establecer la congruencia de tres elementos, los cuales deben estar en un orden determinado y por lo menos uno de ellos tiene que ser un lado. Expliquen por qué.

____

¡A investigar!

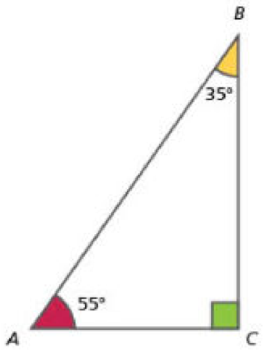
Para establecer la congruencia de triángulos rectángulos existen casos especiales.

Investiga en algún libro de matemáticas o en internet, por ejemplo, en la siguiente dirección:
http://hotmath.com/hotmath_help/spanish/topics/right-triangle-congruence.html
(Consulta: 13 de enero de 2017).

- Cuando se trata de dos triángulos rectángulos, ¿de qué elementos tenemos la certeza de que existe igualdad? ____________________
- Escribe los casos especiales de congruencia que se establecen para triángulos rectángulos. ____________________

Comparte con tu grupo los resultados de tu investigación.

1. Observen el triángulo de la derecha.



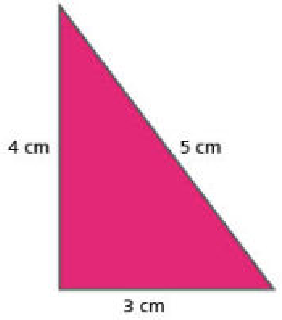
a) Tracen en papel milimétrico un triángulo semejante al de la derecha, con la condición de que sus lados sean de diferente tamaño. Llámenlo triángulo *A'B'C'*.

b) ¿Qué datos necesitaron para trazar el triángulo *A'B'C'*? __________

c) Midan cada lado de los triángulos *ABC* y *A'B'C'*. __________

d) Dividan la medida de cada lado del triángulo *ABC* con su lado correspondiente del triángulo *A'B'C'*. ¿Los lados correspondientes son proporcionales? __________

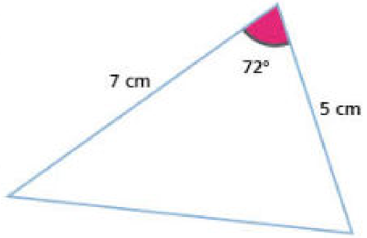
2. A partir del triángulo de la derecha, realicen lo que se indica.



a) Tracen en papel milimétrico dos triángulos cuyos lados sean proporcionales a las medidas del triángulo.

b) Utilicen su transportador para medir cada ángulo de los dos triángulos que construyeron. ¿Hay alguna relación entre los ángulos de los dos triángulos que trazaron y los ángulos del triángulo original? Argumenten su respuesta. __________

3. En el siguiente triángulo se indica la medida de dos de sus lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos. A partir de esa información, lleven a cabo lo que se pide.



a) Tracen dos triángulos, en su cuaderno, que tengan dos lados proporcionales a 7 cm y 5 cm, y que el ángulo entre ellos siga siendo de 72º. Tomen nota de las medidas de los lados que utilizaron. ¿Qué proporciones guardan con respecto al triángulo de la figura?

____

b) Midan con su transportador los ángulos de los dos triángulos que construyeron y del triángulo anterior. ¿Qué relación encuentran entre los ángulos de los tres triángulos? __________

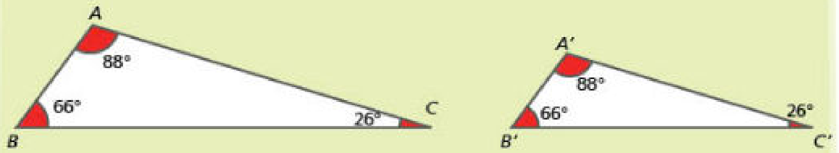
c) Midan con su regla el tercer lado de cada triángulo. ¿Los lados correspondientes son proporcionales? __________

d) Comparen sus trazos y sus respuestas con los de otras parejas de compañeros.

Analicen la siguiente información y contrástenla con las afirmaciones y construcciones que hicieron anteriormente. Luego, respondan lo que se pregunta.

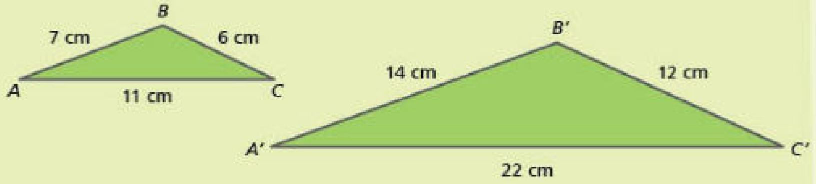
Dos triángulos son semejantes si se cumple alguno de los siguientes criterios de semejanza.

Criterio *AAA*. Dos triángulos que tienen los tres ángulos iguales son semejantes.



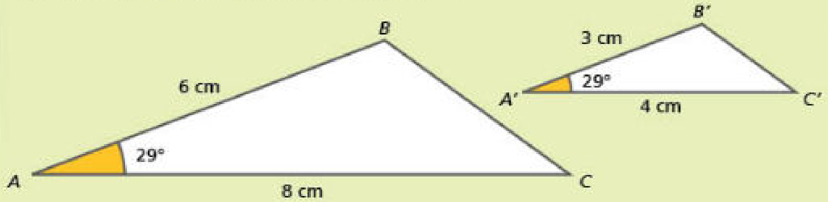
$\angle A = \angle A' = 88°$ $\quad \angle B = \angle B' = 66°$ $\quad \angle C = \angle C' = 26°$

Criterio *LLL*. Dos triángulos que tienen los tres lados proporcionales son semejantes.



$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{14}{7} = 2$ $\quad \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{12}{6} = 2$ $\quad \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{22}{11} = 2$

Criterio *LAL*. Dos triángulos que tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual, son semejantes.



$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad \angle A = \angle A' = 29°$ $\quad \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

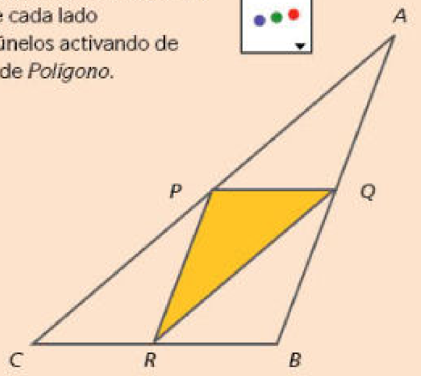
a) ¿Coinciden los criterios de semejanza con las conclusiones a las que ustedes llegaron? ¿Por qué? ______

b) Realicen las adecuaciones que consideren necesarias en sus conclusiones.

Tecnología

El programa *Geogebra* es de utilidad para revisar los criterios de semejanza de triángulos mediante la manipulación de las construcciones que realizas.

1. Activa el botón *Polígono* y construye un triángulo cualquiera.
2. Con el botón de *Punto medio* obtén el punto medio de cada lado del triángulo y únelos activando de nuevo el botón de *Polígono*.



3. Con el botón de *Distancia* o longitud mide los lados de los triángulos exterior e interior.
4. Utiliza el botón *Ángulo* y obtén la medida de cada ángulo de ambos triángulos.

a) ¿Qué resultado se obtiene al dividir las medidas de los lados de los triángulos? ______

b) ¿Cómo son las medidas de los ángulos? ______

c) Manipula cualquiera de los vértices del triángulo exterior. ¿Qué sucede con la medida de los ángulos?, ¿y con el cociente de los lados? ______

d) ¿Sucederá lo mismo si relacionas el triángulo exterior con cualquiera de los otros triángulos? Para verificarlo obtén la medida de los ángulos y los lados de los demás triángulos.

e) ¿El triángulo exterior es semejante a los demás triángulos?, ¿cuál es la razón de semejanza? ______

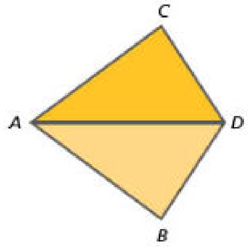
f) ¿Cuál es la proporción de sus áreas? ______

g) Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

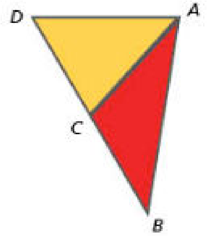
Realiza las siguientes actividades y argumenta tus respuestas. Al terminar, pon a consideración tus resultados con todos tus compañeros.

1. Con la información que se proporciona, determina en cada caso si los triángulos son congruentes. Justifica tu respuesta. ______

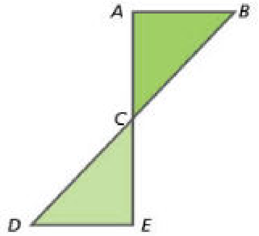
a) *AD* es bisectriz de los ángulos *CAB* y *BDC*.



b) El triángulo *ABD* es isósceles y *AC* es bisectriz del ángulo *DAB*.



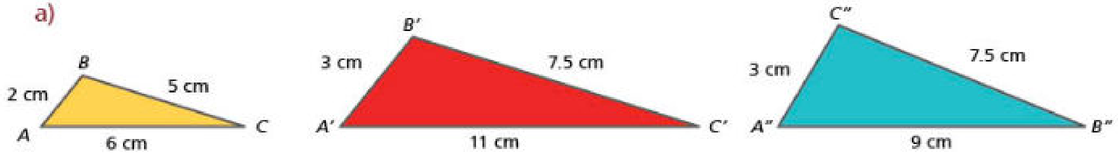
c) *AB//DE* y *C* es el punto medio de *BD*.



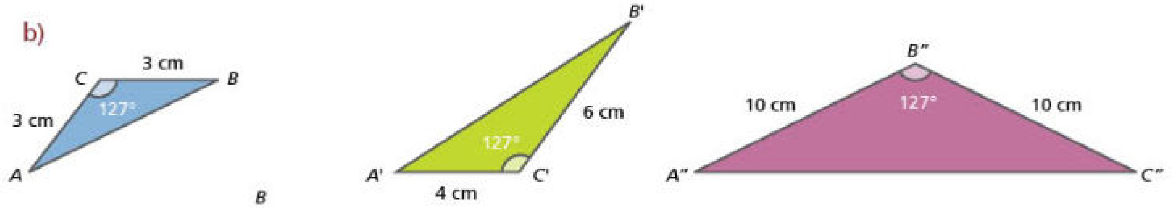
Bisectriz es la recta que al pasar por el vértice del ángulo lo divide en dos ángulos iguales.

2. En cada uno de los siguientes incisos hay dos triángulos que son semejantes. Escribe cuáles son y argumenta qué criterios consideraste para determinarlo. ______

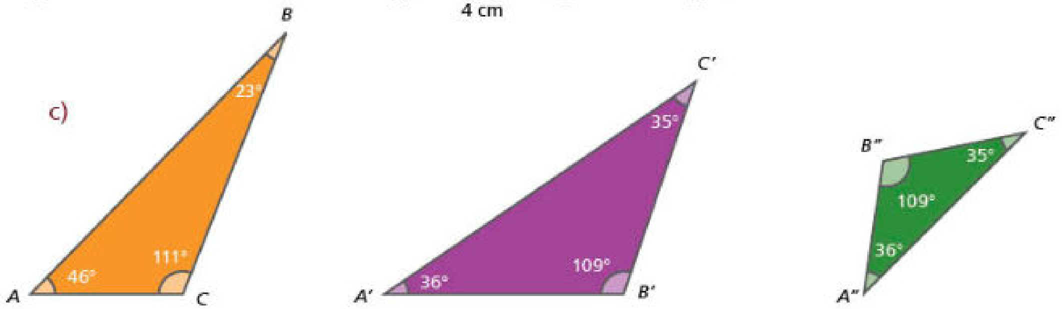
a)



b)



c)



Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Reconozco que los criterios de congruencia son las condiciones que garantizan que los triángulos que las cumplen, son siempre congruentes entre sí.			
Reconozco que los criterios de semejanza son las condiciones que garantizan que los triángulos que las cumplen, son siempre semejantes.			
Reconozco que para que dos triángulos sean congruentes, es suficiente que sólo algunos lados y/o ángulos sean iguales.			
Identifico que dos triángulos son semejantes si: tienen dos ángulos iguales; dos lados proporcionales e igual el ángulo que forman.			
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades? ¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño? Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:			

Recuerda que en la medida en que realices esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

3. En cada uno de los siguientes casos, determina si es posible trazar triángulos semejantes. Argumenta tus respuestas.

a) Dos de los lados de un triángulo miden 5 cm, y el tercer lado 4 cm; los lados del triángulo correspondiente miden 7.5 cm y 6 cm. ____

b) Los lados de uno de los triángulos miden 4, 7 y 9 cm respectivamente, y sus correspondientes en el otro triángulo miden 3, 5.25 y 6.75 cm.

c) En un triángulo, uno de sus lados mide 6 cm y uno de sus ángulos 90°; en el otro triángulo, el lado y el ángulo correspondientes miden 4.5 cm y 90°, respectivamente. ____

d) Dos lados de un triángulo miden 4 cm y el tercero 5 cm; el ángulo comprendido entre los primeros mide 80°. En el segundo triángulo los lados correspondientes miden 3 cm y 3.75 cm y el ángulo correspondiente se conserva. ____

e) Los tres ángulos de cada uno de los dos triángulos miden 50°, 64° y 66° y sus lados son proporcionales. ____

4. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Si tienen dudas, coméntelas con su profesor y con todo el grupo disípenlas. Escriban una conclusión. ____

Representaciones gráficas, tabulares y algebraicas

Programa

Eje: *Manejo de la información*
Tema: *Proporcionalidad y funciones*
Contenido: *Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.*

El señor Gutiérrez se ha percatado de que cuando viaja a una velocidad constante de 80 km/h, su automóvil consume aproximadamente 1 litro de gasolina por cada 15 km que recorre. Él desea conocer la distancia que recorre su automóvil con distintas cantidades de gasolina. ¿Cuántos kilómetros recorre con 6 litros de gasolina? ____

1. Completa la tabla y contesta lo que se te pide.

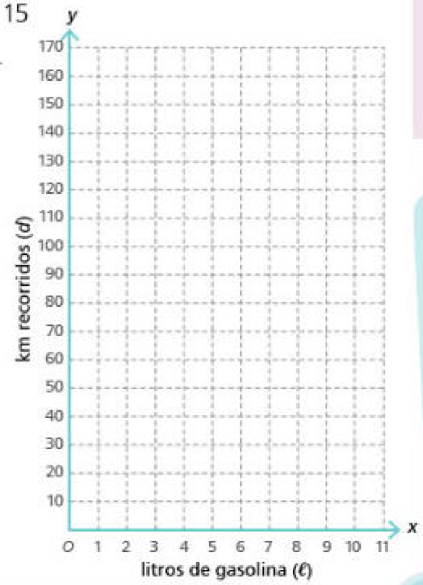
Litros de gasolina	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kilómetros recorridos (d)	15	30			75					150
Incremento										

a) ¿Qué operación realizaste para encontrar los kilómetros recorridos (d), conociendo los litros de gasolina (ℓ)? Justifica tu respuesta. ____

b) Subraya la expresión algebraica que te permite encontrar los kilómetros recorridos (d). Argumenta tu respuesta. ____

- $d = 15 + \ell$
- $d = \ell - 15$
- $d = 15 \times \ell$
- $d = \frac{\ell}{15}$

2. Construye la gráfica que relaciona los litros de gasolina (ℓ) con los kilómetros recorridos (d).



Al margen
Hay situaciones que tienen que ver con la proporcionalidad, como son los porcentajes, escalas en mapas y planos. Los mapas y los planos se han usado desde hace varios siglos y son como una fotografía que nos muestra la realidad, pero en pequeño. Indaga: ¿por qué se dice que los mapas o planos guardan cierta proporción con las dimensiones en la realidad?

Mapa de México

3. Analiza la gráfica anterior y contesta las siguientes preguntas.

a) Cuando aumentan al doble los litros de gasolina, ¿cuánto aumentan los kilómetros recorridos? ____________ ¿Y cuando aumentan al triple? ____________ ¿Y cuando disminuyen a la mitad? ____________

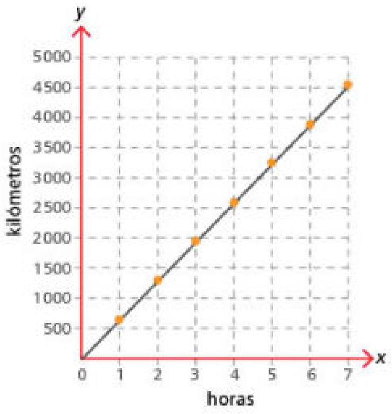
b) ¿Es proporcional la relación entre el consumo de gasolina y los kilómetros recorridos? ____________

c) ¿Qué sucedería si sus promedios de velocidad aumentaran? ____________

4. Compara tus respuestas con las de tu grupo.

5. Las líneas aéreas aproximan las horas de vuelo de acuerdo con la distancia de la ruta. La siguiente gráfica muestra la distancia promedio que recorre un avión cada hora. ¿Cuánto tardará en viajar de la ciudad de Nueva York a Los Ángeles si la distancia es aproximadamente de 3 900 km? ____________

Vuelo de Nueva York a Los Ángeles 3 900 km.



a) ¿Qué distancia recorre el avión en 2 horas? ¿Y en 4 horas? ____________

b) Completa la siguiente tabla.

Horas de vuelo (t)	1	2	3	4	5	6	7
km recorridos (d)		1 300					
Diferencia							

La relación de magnitudes proporcionales es el cociente entre dos magnitudes cuyo resultado es igual a una constante llamada factor de proporcionalidad constante.

c) ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad? ____________

d) ¿Qué operación realizas para saber cuántos kilómetros recorre el avión en 15 horas? Describe el procedimiento que utilizaste para contestar la pregunta. ____________

e) ¿Cuál expresión algebraica permite encontrar los kilómetros recorridos (d) en función de las horas de vuelo (t)?

$d = 650 - t$ $\quad d = 650 \times t$ $\quad d = \frac{650}{t}$ $\quad d = 650 + t$

f) ¿Cuántas horas le tomará al avión recorrer una distancia de 2 500 km? ____________

g) ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas te permite encontrar las horas de vuelo (t) en función de los kilómetros recorridos (d)? Subráyala.

$t = 650 - d$ $\quad t = 650 \times d$ $\quad t = \frac{d}{650}$ $\quad t = 650 + d$

h) ¿Cuántas horas de vuelo le tomará al avión llegar de Nueva York a Los Ángeles? ____________

i) Comparte los resultados con tus compañeros y compáralos.

1. Un chofer que realiza servicios privados, cobra según la distancia recorrida como se muestra en la siguiente tabla.

Costo	$ 175	$ 350	$ 1400	$ 1225	
Distancia	5 km	10 km		35 km	100 km

a) Si le pagan $ 1400, ¿cuántos kilómetros recorrió? ____________

b) ¿Cuál es el costo por recorrer 100 km? ____________ ¿Y por recorrer 145 km? ____________

c) Escriban una expresión algebraica que relacione el costo en función de la distancia. ____________

d) Obtengan y escriban la constante de proporcionalidad. ____________

e) Escriban el procedimiento que utilizaron para obtener la constante de proporcionalidad. ____________

f) Comparen su procedimiento con el de sus compañeros.

2. En un juego de video, para pasar al siguiente nivel se requiere un puntaje como se muestra en la tabla.

Nivel	5	7	13	19	48
Puntaje	235	329	611		2 256

a) ¿Cuántos puntos se necesitan para llegar al nivel 19? ____________
¿Y al nivel 50? ____________

b) Si Ángel requiere 8 puntos para llegar al nivel 43, ¿cuántos puntos ha obtenido hasta ahora? ____________.

c) José Francisco ha llegado al nivel 37, ¿cuántos puntos necesita para llegar al mismo nivel que Ángel? ____________

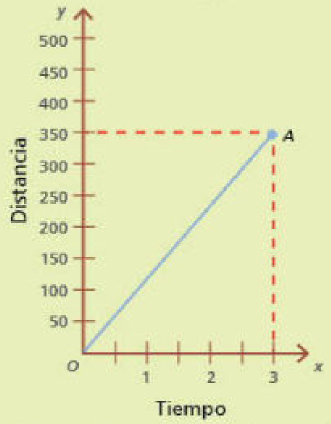
d) Dana ha alcanzado el nivel 39, ¿cuántos puntos necesita para alcanzar el nivel de José Francisco? ____________.

e) Completa la expresión algebraica que muestre la relación entre el nivel (N) y el puntaje (P) obtenido por un jugador. $P =$ ______ N

f) Traza en tu cuaderno la gráfica de la expresión algebraica que completaste en el inciso anterior.

Para avanzar

En la gráfica se muestra la velocidad y distancia recorrida de un vehículo utilizado para carreras, mismo que va a una velocidad constante. Considerando que el vehículo se encuentra en un punto A, la abscisa en A es 3 y la ordenada al origen es 345.



1. Con base en la gráfica completa la tabla.

Tiempo (abscisa)	Distancia (ordenada)
1 h	115 km
1.5 h	
2 h	
2.5 h	287.5 km
	345 km

Si para todos los puntos calculamos $\frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}}$, podemos observar que las razones se mantienen constantes.

$$\frac{115}{1} = \frac{172.5}{1.5} = \frac{230}{2} = \frac{287.5}{2.5} = \frac{345}{3} = 115$$

El factor de proporcionalidad (k) es 115.

$k = 115$

2. A partir de la situación anterior, calcula la distancia recorrida cuando $t = 5.2$ h.

a) ¿Cómo obtendrías dicha distancia? ____________

b) ¿Qué uso le darías al factor de proporcionalidad? ____________

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así.

1. ¿Colaboró en el llenado de la tabla y la elaboración de la gráfica a partir de la misma?
2. ¿Comparó la gráfica con otros equipos?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención en la discusión sobre los procedimientos que utilizaron sus compañeros?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su pareja, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

En equipo

Resuelvan el siguiente problema.

1. El ancho de un salón de clases en forma de paralelogramo es de 6 m y el largo mide 12 m.

a) Si el perímetro del salón no varía, ¿cuánto medirá el largo del salón si el ancho es igual al doble? ____________

b) Completen la siguiente tabla considerando distintas medidas para el largo y el ancho del salón de clases.

Ancho (m)	3		5	6		8	9	
Largo (m)		8		12	14			20

c) Escriban una expresión algebraica que represente lo que se plantea en el problema. ____________

d) Según la tabla del inciso b y la expresión algebraica del inciso c, tracen en su cuaderno la gráfica correspondiente.

e) Comenten sus respuestas y comparen la gráfica con los demás equipos. Contesten lo siguiente:

¿Se establece alguna relación constante entre las medidas del largo y el ancho? ____________

¿Cuál? Descríbanla. ____________

¡A investigar!

Investiga en libros, enciclopedias o en internet lo siguiente y escribe las respuestas en tu cuaderno:

- ¿Qué es la proporción áurea? ¿Cuáles son sus características?
- ¿Qué monumentos de la antigua Grecia se construyeron con base en ella?
- ¿Qué aplicación tiene esta proporción en el arte?

Comparte tus respuestas con tu grupo y compárenlas.

Tecnología

1. En una hoja electrónica de cálculo elabora la tabla y la gráfica del problema que se planteó en el ejercicio número 1 de la actividad "En equipo".

a) ¿Qué fórmula escribiste para obtener el largo del salón? ____________

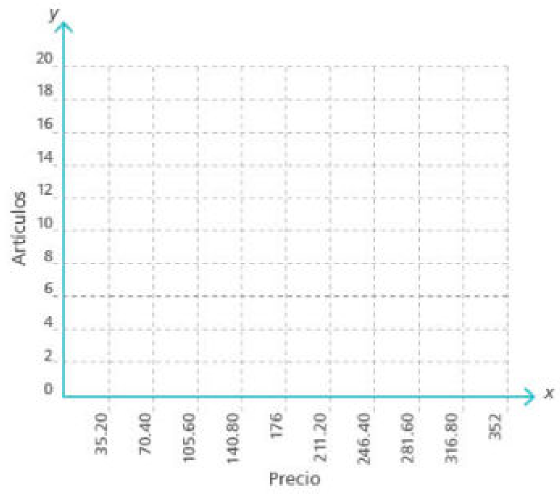
b) ¿Qué relación hay entre la fórmula anterior y la expresión algebraica del problema? ____________

c) Si tuvieras que escribir una fórmula para obtener el ancho del salón a partir de los datos del largo, ¿cuál sería? ____________

d) Comenta tus respuestas con tus compañeros de grupo.

1. A partir de la siguiente tabla, obtén la constante de proporcionalidad, su expresión algebraica y la gráfica correspondiente.

Artículos	Precio ($)
2	35.20
4	70.40
6	105.60
8	140.80
10	176.00
12	211.20
14	246.40
16	281.60
18	316.80
20	352



2. Completa la tabla y traza en tu cuaderno la gráfica de la siguiente expresión algebraica.

$$B = A \times 1.5$$

B	*A*
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

3. Comenta tus respuestas y compara las gráficas con las de tus compañeros.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorario
Identifico relaciones de proporcionalidad en tablas y gráficas.			
Analizo y represento en gráficas relaciones proporcionales.			
Represento algebraicamente una relación de proporcionalidad.			
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades? ¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño? ¿Cómo apliqué los razonamientos matemáticos involucrados en esta lección en la resolución de problemas? Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:			

Recuerda que en la medida en que realices esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática

1. En una imprenta se venden lonas impresas y su precio depende de los metros cuadrados que sean requeridos. El costo por metro cuadrado es de $ 149.00. Adicional a ello, se cobran $ 30.00 por la elaboración del diseño que se va a imprimir en la lona.

Un cliente desea mandar a elaborar lonas de forma cuadrada de diferente tamaño. En la siguiente tabla se observan algunos precios, según el tamaño de la lona.

Medida del lado (m)	Precio ($)
1	149
2	298

1 m

2 m

a) Sin considerar la cuota que se cobra por elaborar el diseño, ¿cuánto se pagará por una lona que mide 2 m de lado? ¿Y por una que mide 3 m de lado? Argumenta tus respuestas. ____________________

b) Considera la cuota por la elaboración del diseño, ¿cuál es el precio de una lona de 5 m de lado? ¿Y el de una lona de 9 m de lado? Argumenta tus respuestas. ____________________

c) Con base en las actividades previas completa la siguiente tabla.

Medida del lado (m)	Área de la lona (m^2)	Precio ($)
1		149
2		596
3	9	
4		
5		
6		
7		

Programa

Eje: *Manejo de la información*
Tema: *Proporcionalidad y funciones*
Contenido:
Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de física, biología, economía y otras disciplinas.

Al margen
Una relación de variación cuadrática es útil para describir movimientos con aceleración constante, trayectoria de proyectiles, ganancias y costos de empresas, variación de la población de una determinada especie que responde a este tipo de función.
¿Sabías que esto permite obtener información sin necesidad de recurrir a la experimentación directa?

d) ¿Cuánto pagará un cliente si únicamente desea que le hagan el diseño de la lona? Justifica tu respuesta. ____________________

____

2. Analiza las siguientes expresiones algebraicas y contesta las preguntas:

$p = m^2 + 49$ $\quad p = 149\ m^2$ $\quad p = 49\ m^2 + 100$ $\quad p = 100\ m^2$

a) ¿Cuál de las expresiones algebraicas permite calcular el precio total de la lona (p), en función de los metros (m) que tenga de lado? Justifica tu respuesta. ____________________

____

b) Si no se cobrara ningún cargo por la elaboración del diseño de la lona, escribe la expresión algebraica que permite calcular su precio (p) en función de los metros (m) que tenga de lado. Justifica tu respuesta.

____

____

c) Compara tus respuestas con las de tus compañeros y establezcan acuerdos en caso de encontrar alguna diferencia.

1. Reúnanse en equipos de cuatro integrantes y resuelvan el siguiente problema.

Platik-me es una sala de chat en internet para estudiantes que se ayudan a resolver sus tareas. Al momento en que dos estudiantes se encuentran, aparece un mensaje que dice *¡A trabajar!*

a) ¿Cuántos mensajes *¡A trabajar!* han aparecido si únicamente hay un estudiante en la sala de chat? ¿Y si hay dos estudiantes? ¿Y si son tres estudiantes los que hay en la sala? Justifiquen sus respuestas. ________

____

____

b) Comprueben su respuesta anterior, usando el siguiente esquema.

c) ¿Cuántos mensajes aparecerán cuando en la sala haya cuatro estudiantes? ¿Y cuando haya cinco? Justifiquen sus respuestas. ________

____

____

d) En el siguiente esquema se representan seis estudiantes que han establecido contacto entre sí. Tracen líneas de colores para señalar la relación entre cada uno de ellos. ¿Cuántos mensajes *¡A trabajar!* aparecerán? Justifiquen su respuesta. ____________________

____

e) De acuerdo con lo que han trabajado en la actividad, completen la siguiente tabla.

Número de estudiantes	Mensajes *¡A trabajar!*
1	0
2	1
3	3
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

f) ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas permite calcular el número de mensajes (m) que aparecen en función de los estudiantes (e) que interactúan en el *chat*? Subráyenla.

$m = \frac{e^2 + e}{2}$ $\quad m = \frac{e^2 - e}{2}$ $\quad m = e^2 - e$ $\quad m = e^2 + e$

g) Comparen sus respuestas con los demás equipos y mencionen las estrategias que les permitieron obtener los resultados de la tabla, así como identificar la expresión algebraica que representa la situación.

¡A investigar!

Ingresa a la dirección electrónica: http://www.uv.mx/personal/grihernandez/files/2011/04/ficheroactividades.pdf (consulta 23 de enero de 2017) y con la ayuda de tu profesor revisa la actividad *Patrones y ecuaciones* de la página 112 de dicho documento. A partir de ella, realiza lo siguiente:

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas, explicando por qué piensan así:

1. ¿Logró identificar el número de mensajes que aparecían en el *chat* dependiendo del número de estudiantes conectados?
2. ¿Logró determinar cuál era la expresión algebraica que representaba la situación descrita en el problema?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros?
4. ¿Qué aspectos de su participación deben mejorar?

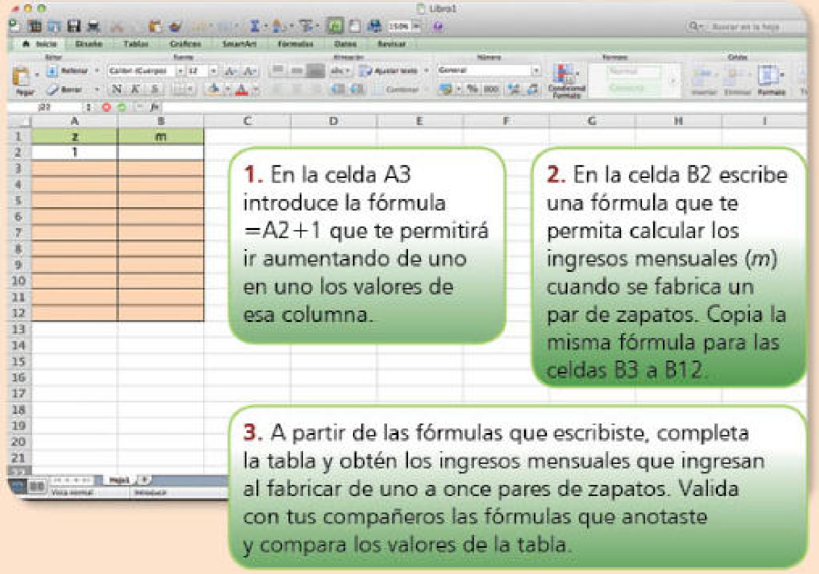
- Elabora una tabla para cada uno de los problemas (secuencia de cubos y secuencia de trapecios) que se plantean.
- Identifica la expresión algebraica que permita obtener el número de cubos, en el primer problema; y el área de los trapecios, en el segundo.

Comparte tu investigación con el grupo y comenta sobre las dificultades a las que te enfrentaste y, luego, analiza estrategias para resolver las actividades.

Tecnología

Analiza el siguiente problema y, con la ayuda de una hoja de cálculo, responde las preguntas que se plantean.

Los ingresos mensuales de un fabricante de zapatos están dados por la función $m = 100z - 2z^2$, donde z es la cantidad de pares de zapatos que fabrica cada mes y m representa los ingresos mensuales.



a) ¿Cuáles son los ingresos si se fabrican 15 pares de zapatos? Justifica tu respuesta teniendo en cuenta el trabajo con la hoja de cálculo. ______

b) ¿Cuáles son los ingresos si se fabrican 20 pares de zapatos? ¿Y si se fabrican 30 pares? Argumenta tu respuesta. ______

c) ¿Qué cantidad de pares debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso? ¿A partir de qué cantidad de pares de zapatos fabricados comienza a tener pérdidas? Justifica tus respuestas. ______

d) Compara tus respuestas con las de tus compañeros e identifiquen aquellas en las que encuentren diferencias.

Para avanzar

Una relación de variación cuadrática está representada por una función de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde a, b y c pueden ser números reales cualesquiera, $a \neq 0$

Una relación de variación cuadrática puede representarse mediante una tabla, una gráfica o una expresión algebraica.

En parejas

1. En una isla se introdujeron 112 iguanas. Al principio se reprodujeron rápidamente, pero los recursos de la isla comenzaron a escasear y la población disminuyó. El número de iguanas a los t años de haberlas dejado en la isla está dado por:

$$i = -t^2 + 22t + 112 \quad (t > 0)$$

a) Completen la siguiente tabla en la que se observa el número de iguanas en la isla con respecto al tiempo transcurrido.

Tiempo (años)	Número de iguanas
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

b) ¿Cuántos años transcurrieron en los que la población de iguanas continuó aumentando? ¿A los cuántos años comenzó a descender? Justifiquen sus respuestas. ______

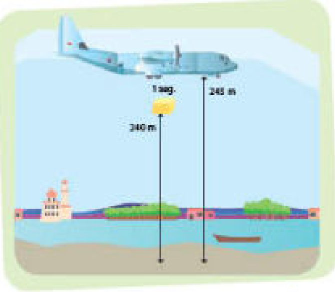
c) ¿A los cuántos años, aproximadamente, la población de iguanas se extinguió? Argumenten su respuesta. ______

2. Comparen sus respuestas con las demás parejas. Asignen nuevos valores en la tabla del inciso a para validar sus respuestas.

Individual

Realiza las actividades que se plantean a continuación:

1. Un avión reparte alimentos a una población que se encuentra en desastre a causa de una inundación. Como no le es posible bajar hasta tierra firme, deja caer un paquete de alimentos desde una altura de 245 m. La tabla siguiente proporciona información referente a la distancia de caída del paquete con respecto al tiempo transcurrido. Completa la tabla de la página siguiente.



Tras 1 segundo de caída el paquete se encuentra a una altura de 240 m.

Tiempo transcurrido (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Distancia de caída (m)	0	5	20	45			180		

a) A partir de la información anterior, completa la tabla siguiente:

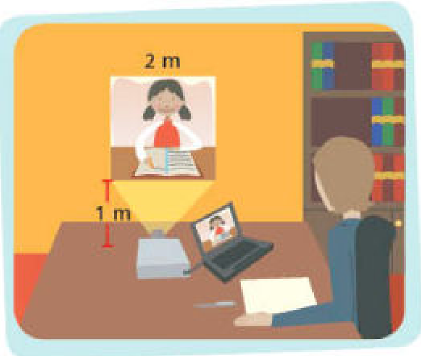
Tiempo (s)	Distancia de caída (m)	Altura a la que se encuentra el paquete (m)
0	0	245
1	5	240
2	20	
3	45	
4		
5		
6	180	
7		
8		

b) ¿Cuánto tiempo tardó el paquete en llegar al suelo? Justifica tu respuesta. ______

c) ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas permite calcular la distancia de caída d en función del tiempo transcurrido t? Justifica tu respuesta. ______

$d = 5t^2$ $\qquad$ $d = 5 + t^2$ $\qquad$ $d = 25 + t^2$ $\qquad$ $d = 25t^2$

2. El tamaño de la imagen de un proyector depende de la distancia que hay entre él y la superficie sobre la que se está proyectando. En la clase de Historia, el profesor coloca el proyector a 1 m de la pantalla y obtiene que la imagen que proyecta es un cuadrado de 2 m de lado. A partir de esta información, completa la tabla y obtén la expresión algebraica que representa la situación descrita.



Distancia entre el proyector y la pantalla (m)	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
Área de la imagen proyectada (m²)	4		16						100

¿A qué distancia deberá colocar el proyector si deseara obtener una imagen de 56.25 m²? Justifica tu respuesta. ______

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Construyo tablas en donde relaciono las cantidades descritas en el problema.			
A partir de las relaciones de los datos de una tabla, identifico o determino cuál es la expresión algebraica que me permite obtener otros datos del mismo problema.			
Identifico la importancia de las relaciones de variación cuadrática en disciplinas como física, economía, entre otras.			
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades? ¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño? ¿Cómo demostré disposición para el estudio de los contenidos de esta lección? Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:			

Recuerda que el compromiso hacia el trabajo es fundamental para el logro de aprendizajes significativos y ello te permitirá tener una mejor valoración de ti mismo.

Escala de la probabilidad

La probabilidad se aplica en casi todas las ramas de la ciencia. Existen hechos o fenómenos cuyo resultado no se puede predecir de manera exacta, pues en ellos interviene el azar.

1. Se va a realizar una rifa con 400 boletos que han sido numerados del 1 al 400. Todos los boletos se vendieron, y el ganador será el primer boleto que se extraiga de una urna.

a) Si David compró un boleto, ¿qué posibilidad tiene de ganar el premio? ______

b) ¿Cuál es la probabilidad de que Laura gane el premio si compró seis boletos? ______

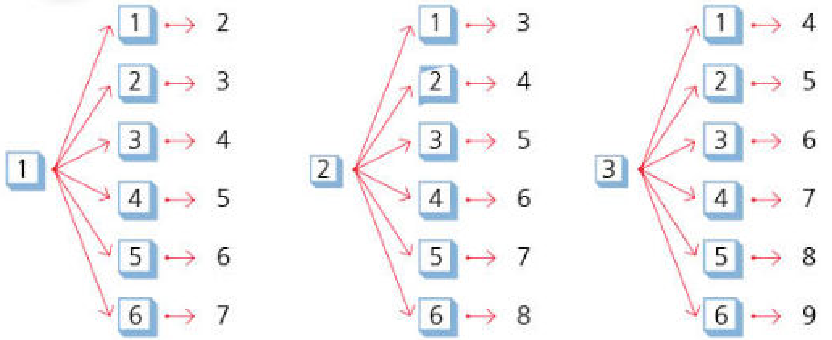
c) Si Azucena comentó a sus amigos que tenía una probabilidad de 4 de 400 (o que es lo mismo $\frac{1}{100}$) de ganar el premio, ¿cuántos boletos compró? ______

d) Diana y Lorenzo querían saber quién de los dos tenía más posibilidades de ganar el premio. Diana compró los boletos 59, 60, 61, 62 y 63, en tanto que Lorenzo compró los boletos 20, 40, 60, 80 y 100. ¿Quién tiene más oportunidades de ganar? ¿Por qué? ______

e) Compara tus repuestas con las del grupo y escribe en tu cuaderno cómo se calcula la probabilidad de un evento.

1. Analicen el siguiente esquema en el que se muestran los resultados que se obtienen al lanzar dos dados al mismo tiempo y sumar los puntos de sus caras.

2. Escriban el espacio muestral del experimento anterior. ______



Programa

Eje: *Manejo de la información*
Tema: *Nociones de probabilidad*
Contenido: *Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.*

Al margen

Los sumerios y asirios utilizaban un hueso extraído del talón de animales, denominado astrágalo o talus, que tallaban para que pudiera caer en cuatro posiciones distintas, por lo que son considerados como los precursores de los dados. En el caso de la civilización egipcia, algunas pinturas encontradas en tumbas de faraones muestran tanto astrágalos como tableros para el registro de los resultados. La historia de la probabilidad comienza en el siglo XVII cuando Pierre Fermat y Blaise Pascal tratan de resolver algunos problemas relacionados con los juegos de azar.
Si lanzas un dado, ¿cuáles son todos los posibles resultados? ¿Qué es más probable que salga, un número par o impar? ¿Cuál es la probabilidad de que salga el número 6?

$$4 \begin{cases} 1 \to 5 \\ 2 \to 6 \\ 3 \to 7 \\ 4 \to 8 \\ 5 \to 9 \\ 6 \to 10 \end{cases} \qquad 5 \begin{cases} 1 \to 6 \\ 2 \to 7 \\ 3 \to 8 \\ 4 \to 9 \\ 5 \to 10 \\ 6 \to 11 \end{cases} \qquad 6 \begin{cases} 1 \to 7 \\ 2 \to 8 \\ 3 \to 9 \\ 4 \to 10 \\ 5 \to 11 \\ 6 \to 12 \end{cases}$$

Espacio muestral (E) es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Ejemplos:

- Al lanzar una moneda, el espacio muestral es $E = \{$sale águila, sale sol$\}$ o $E = \{A, S\}$.
- Al lanzar un dado de seis caras, el espacio muestral es $E = \{$sale 1, sale 2, sale 3, sale 4, sale 5, sale 6$\}$ o $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3. De acuerdo con lo anterior, completen la siguiente tabla.

Suma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Posibilidades	0	1	2									
Probabilidad de salir la suma	0 de 36	1 de 36	2 de 36									

4. Según la definición clásica de la probabilidad y la información anterior, respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál fue la utilidad de determinar el espacio muestral? ______

b) ¿Qué suma es más probable que resulte más veces? ¿Por qué? ______

c) ¿Qué suma es menos probable que resulte más veces? ¿Por qué?

d) ¿Qué suma es seguro que resulte? ¿Por qué? ______

e) ¿Qué suma es imposible que resulte? ¿Por qué? ______

5. A partir de los resultados de la tabla anterior, contesten lo siguiente.

a) La probabilidad del evento "La suma de sus caras es 7" es $\frac{6}{36} = 0.166$.

b) La probabilidad del evento "La suma de sus caras es 8" es $\frac{5}{36} =$ ______

c) La probabilidad del evento "La suma de sus caras es 9" es $\frac{\quad}{36} =$ ______

d) La probabilidad del evento "La suma de sus caras es 10" es ―― = ______

e) De los cuatro eventos anteriores, ¿cuál tiene mayor probabilidad? ______ ¿Por qué? ______

6. Completen las siguientes afirmaciones.

a) La probabilidad del evento "La suma de sus caras es 7" es 16.6%.

b) La probabilidad del evento "La suma de sus caras es 8" es ______

c) La probabilidad del evento "La suma de sus caras es 9" es ______

d) La probabilidad del evento "La suma de sus caras es 10" es ______

e) En el experimento de lanzar dos dados al mismo tiempo, ¿puede haber un evento cuya probabilidad sea $\frac{40}{36}$? ______ ¿Por qué? ______

f) ¿Cuál es la máxima probabilidad de un evento? ______

g) ¿Cuál es la probabilidad de un evento seguro? ______

h) ¿Cuál es la probabilidad de un evento imposible? ______

7. Comparen sus respuestas con las de otras parejas y discutan acerca de cuáles son las posibles formas de expresar la probabilidad de un evento y cuál es la escala numérica que se usa para medir la probabilidad.

Para avanzar

1. Analicen la siguiente información y respondan las preguntas.

La medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento o suceso A, cuando se realiza un experimento aleatorio, se llama probabilidad del evento o suceso A y se representa con $P(A)$.

La probabilidad es una medida sobre la escala 0 a 1 de tal forma que:

- Al evento o suceso imposible le corresponde el valor 0.
- Al evento o suceso seguro le corresponde el valor 1.

La probabilidad de un evento se calcula dividiendo el número de casos favorables entre el número de casos posibles del experimento.

a) ¿El evento "que salga águila" al lanzar una moneda es seguro, imposible o probable? ______

b) ¿Cuáles son los casos posibles de lanzar una moneda? ______ ¿Y de un dado? ______

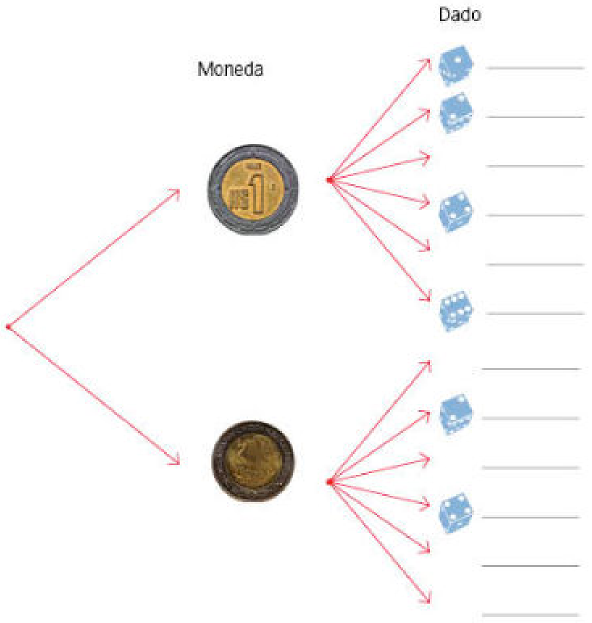
c) ¿Cuáles son los casos favorables de que salga un número impar? ______

d) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un número impar? ______

2. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. En caso de duda, coméntenlas con todo el grupo y lleguen a un consenso.

Realicen lo siguiente:

1. Describan de qué trata el experimento que se ilustra en la página siguiente y completen el diagrama de árbol.



a) ¿Cuál es el espacio muestral del experimento? ____________________

b) Escriban los resultados favorables de cada evento.

Eventos	Resultados favorables
A: "Que caiga águila y 6"	*A*= { }
B: "Que caiga sol y número par"	*B*= { }
C: "Que caiga sol y número impar"	*C*= { }
D: "Que caiga águila y número menor que 4"	*D*= { }
E : "Que caiga sol y número impar"	*E*= { }

2. En otro experimento se lanza un dado. En la parte izquierda de cada fila se define un evento, completen en la columna derecha los elementos que hacen que no ocurra el evento.

Evento	Evento complemento
A: Sale un número par en el dado (2, 4, 6)	*A*: no ocurre cuando sale { }
B: Sale la cara 3 o la cara 6 en el dado (3, 6)	*B*: no ocurre cuando sale { }
C: Sale un número primo (2, 3, 5)	*C*: no ocurre cuando sale { }

a) Lean y comenten la siguiente definición de evento complementario:

El evento complementario de un evento *A* es otro evento A^c que ocurre siempre que *A* no ocurre.

b) Den un ejemplo de una experiencia aleatoria y dos eventos y sus complementarios.

3. En una clase de Matemáticas hay 31 alumnos; algunos de ellos usan lentes, como lo muestra la siguiente tabla.

	Mujeres	Hombres
Usa lentes	3	6
No usa lentes	12	10

Con motivo del fin de cursos, la clase realizará un concurso de habilidades matemáticas. Si el profesor elige a los participantes al azar, qué probabilidad hay de que el participante seleccionado…

a) Sea mujer. ____________________

b) Use lentes. ____________________

c) Sea una mujer con lentes. ____________________

d) Sea un hombre sin lentes. ____________________

e) No sea mujer. ____________________

f) No sea hombre con lentes. ____________________

4. La familia de Carlos saldrá de vacaciones por unos días. El reporte del clima informó que la probabilidad de lluvia para el viernes es de un 40%, de un 30% para el sábado, de un 60% para el domingo y de un 50% para el lunes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no les llueva el lunes? ____________

b) ¿Qué día tiene una probabilidad del 70% de que no les llueva? ____________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no les llueva ningún día? ____________

5. Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Si tienen dudas, coméntelas con su profesor y con todo el grupo disípenlas.

Para avanzar

Analicen la siguiente información y contrástenla con las afirmaciones y construcciones que hicieron anteriormente.

Dos o más eventos son mutuamente excluyentes, si no pueden ocurrir simultáneamente. Es decir, la ocurrencia de un evento no impide la ocurrencia del otro evento (o eventos).

Por ejemplo, al lanzar una moneda, ¿sólo puede ocurrir que salga sol o águila o los dos a la vez? ¿Los eventos "Cae águila" y "Cae sol" son mutuamente excluyentes? ¿Por qué? ____________________

Dos o más eventos no son mutuamente excluyentes, cuando es posible que ocurran ambos.

Si consideramos en un juego de dominó los eventos "Sacar al menos un blanco" y "Sacar al menos un seis", ¿son o no son mutuamente excluyentes si ocurriera que salga el seis blanco? Explica por qué. ____________________

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en dar respuesta a los cuestionamientos del experimento de lanzar una moneda y un dado?
2. ¿Verificó con otros equipos sus respuestas?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de otros compañeros?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su compañero, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

Analicen el siguiente experimento y respondan lo que se pregunta.

1. Experimento: se colocan ocho bolas de billar numeradas del 1 al 8 en una urna y se debe extraer una al azar.

a) ¿Es posible saber, de antemano, cuál saldrá? ¿Por qué? ______

b) ¿Cuántos son los resultados posibles y cuáles son? ______

c) Escriban los resultados favorables de cada evento.

Eventos	Resultados favorables
A: Que la bola tenga un número menor que 8.	*A* = { }
B: Que la bola tenga el número 1.	*B* = { }
C: Que la bola tenga un número menor que 4.	*C* = { }
D: Que la bola tenga un número mayor que 3.	*D* = { }
F: Que la bola tenga un número par.	*F* = { }
K: Que la bola tenga un número par y mayor que 3.	*K* = { }

2. Consideren los siguientes eventos:

D: Que la bola tenga un número mayor que 3.
F: Que la bola tenga un número par.
K: Que la bola tenga un número par y mayor que 3.

¿Los eventos *D* y *F* son mutuamente excluyentes? ______
¿Por qué? ______

3. Comparen sus respuestas con las de otras parejas de compañeros y comenten cuáles son los números de las bolas de billar que se implican en los eventos *D* y *F*. Luego, discutan si los eventos *D* y *K* son mutuamente excluyentes. Finalmente, mencionen qué eventos son mutuamente excluyentes y compartan sus respuestas con el resto del grupo.

Reúnete con un compañero y analicen detenidamente la siguiente información. Luego, respondan lo que se pregunta:

Dos eventos son independientes cuando la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

Por ejemplo, en el experimento anterior que consiste en extraer una bola de una urna que contiene ocho bolas, numeradas del 1 al 8, consideremos dos eventos:

A: "La bola extraída tiene un número par".
B: "La bola extraída tiene un número menor que 4".

Antes de sacar la bola, la probabilidad de *A* es $\frac{4}{8}$ porque hay cuatro bolas pares en la urna, y la probabilidad de *B* es $\frac{3}{8}$ pues hay 3 bolas con números menores que 4.

Imaginemos ahora la siguiente situación. Juan saca una bola, ve el número y le informa a Claudia que se trata de un número par. Le pregunta entonces: ¿cuál es la probabilidad de que el número sea menor que 4?

Claudia sabe que la bola extraída sólo puede tener el 2, el 4, el 6 o el 8, y de estos números, sólo el 2 es menor que 4. Por lo tanto, la probabilidad de *B* resulta ser ahora $\frac{1}{4}$.

Nótese que, sin la información parcial dada por Juan, Claudia hubiera dicho que la probabilidad de *B* era $\frac{3}{8}$; sin embargo, ahora contesta que esta probabilidad es $\frac{1}{4}$. Los eventos *A* y *B* no son independientes, la ocurrencia de uno afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

1. De acuerdo con lo anterior, consideren lo siguiente:

a) Los eventos *C*: "La bola tiene un número mayor que 3" y *G*: "La bola tiene un número impar", ¿son eventos independientes? ¿El hecho de saber que ocurrió *C* no afecta la probabilidad de ocurrencia de *G* y viceversa? ______

b) Los eventos *F*: "La bola tiene un número impar distinto de 3" y *D*: "La bola tiene un número par mayor que 3", ¿son eventos independientes? ¿El hecho de saber que ocurrió *F* no afecta la probabilidad de ocurrencia de *D* y viceversa? ______

2. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y comenten cómo fue que llegaron a ellas. Por ejemplo, para el primer caso, ¿cuál es la probabilidad del evento *C*? ¿Cuál es la probabilidad del evento *D*? Si se extrae una bola y tiene un número mayor que 3, ¿cuál es la probabilidad de que sea un número impar? Con respecto al segundo caso, si se extrae una bola y sale un número impar distinto de 3, ¿cuál es la probabilidad de que sea un número par mayor que 3?

Tecnología

Ingresa a la siguiente dirección electrónica: http://www.monografias.com/trabajos32/teoria-probabilidades/teoria-probabilidades.shtml (Consulta: 13 de enero de 2017) y analiza la información contenida en los puntos 1, 2, 3, 4, 5, y 6.

Una vez que hayas analizado la información, comenta con todo el grupo lo que aprendiste.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Reconozco que la probabilidad es una medida sobre la escala de 0 a 1 y la de un evento se calcula dividiendo el número de casos favorables entre el número de casos posibles.			
Reconozco que existen eventos complementarios, independientes y mutuamente excluyentes.			
Identifico que a un evento imposible le corresponde el valor 0 y al evento seguro le corresponde el valor 1.			

¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades?
¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumí para desarrollar el hábito del pensamiento racional?
Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:

Recuerda que el compromiso hacia el trabajo es fundamental para el logro de aprendizajes significativos y ello te permitirá tener una mejor valoración de ti mismo.

¡A investigar!

Investiga diferentes tipos de eventos o sucesos. Puedes consultar páginas en internet como las siguientes:

a) http://www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/VerContenido.aspx?ID=137622 (Consulta: 13 de enero de 2017).

b) http://www.gestiopolis.com/recursos/experto/catsexp/pagans/eco/45/probabilidad.htm (Consulta: 13 de enero de 2017).

Comparte con tu grupo los resultados de tu investigación.

1. Observa los números y letras en el teclado de un teléfono. Si se oprime al azar una tecla del teléfono como el que se muestra, calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

a) Un número par. $P(A)$ = ________

b) Un divisor de 12. $P(B)$ = ________

c) La letra z. $P(C)$ = ________

d) Una tecla sin número. $P(D)$ = ________

e) Un número menor que 6. $P(E)$ = ________

f) Un número impar. $P(F)$ = ________

2. Calcula las siguientes probabilidades de eventos mutuamente excluyentes:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al oprimir al azar una tecla del teléfono, ésta sea una vocal o una tecla sin número? Justifica tu respuesta.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un número impar o las últimas tres vocales? Explica. ________

3. Comenta tus respuestas con tus compañeros y compáralas.

Presentación de información mediante tablas o gráficas

Programa

Eje: *Manejo de la información*
Tema: *Análisis y representación de datos*
Contenido: *Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.*

1. La siguiente tabla muestra los nacimientos y defunciones de hombres y mujeres en los años 1990, 2004, 2005 y 2010. Analízala y contesta las preguntas.

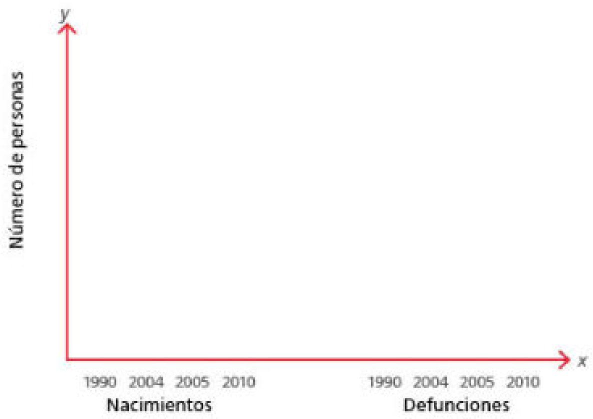
	1990	2004	2005	2010
Nacimientos registrados	2 735 312	2 625 056	2 567 906	2 643 908
Hombres	1 378 259	1 302 411	1 284 304	1 326 612
Mujeres	1 356 261	1 322 074	1 283 009	1 317 023
No especificados	792	571	593	273
Defunciones generales registradas	422 803	473 417	495 240	592 018
Hombres	239 040	261 919	273 126	332 027
Mujeres	182 696	211 294	221 968	259 669
No especificados	1 067	204	146	322

Fuente: INEGI. Estadísticas de Natalidad y Mortalidad.

a) ¿En qué año se registraron más nacimientos? ________

b) ¿En qué año se registró el menor número de defunciones? ________

c) A partir de la información de la tabla anterior, traza una gráfica de barras donde sea muestren los nacimientos y defunciones generales en los años 1990, 2004, 2005 y 2010.



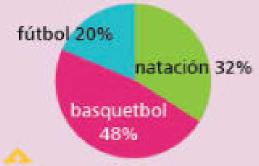
d) Describe lo que representa esta gráfica. ________

e) Comenta tus respuestas con tus compañeros y compáralas.

2. La información anterior, como habrás notado, fue tomada de una institución especializada en manejar información de manera estadística. Contesta lo siguiente:

Al margen

La estadística permite describir y analizar datos económicos, políticos, sociales, psicológicos, biológicos, físicos, etcétera. El trabajo del experto estadístico no consiste sólo en reunir datos y hacer gráficas con ellos, debe interpretar la información a partir de las gráficas y tablas. Al recopilar los datos estadísticos es preciso tener especial cuidado para garantizar que la información sea completa, clara y correcta. ¿Qué elementos consideras que son importantes para recopilar datos que se analizarán estadísticamente?



Gráfica tipo pastel de los deportes que más prefieren algunos alumnos.

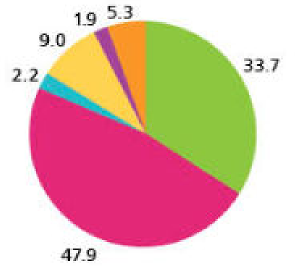
a) ¿Cómo le harías para saber los nacimientos y defunciones acontecidos en las familias de tus compañeros de grupo? ______________________

b) ¿Y si quisieras conocer esta información con respecto a todos los alumnos de tercer grado de tu escuela? ______________________

c) Y si necesitaras representar dicha información con respecto a todos los alumnos de tu escuela, ¿cómo le harías para obtener la información sin tener que preguntarle a todos ellos? ______________________

3. La siguiente gráfica muestra la distribución porcentual de los alumnos al inicio de los estudios de licenciatura en México, por área en 2004. Analízala y contesta las preguntas.

Recuerda que...
Una gráfica circular, o de pastel, es un recurso que se utiliza para representar porcentajes.
Este tipo de gráficas utiliza radios para dividir el círculo en sectores.



Fuente: *Anuario estadístico 2004. Población de licenciatura en universidades e institutos tecnológicos*, México, ANUIES, 2004.

a) ¿En cuál de las áreas de estudio se concentra la mayor cantidad de alumnos? ¿Y en cuál la menor? ______________________

b) ¿Crees que la información presentada en la gráfica podría influir en tu decisión al momento de elegir un área de estudio para cursar tu educación superior?, ¿por qué? ______________________

c) Si el número total de alumnos que iniciaron sus estudios de licenciatura es de 1 940 000, ¿cuántos se inscribieron en cada una de las áreas de estudio? ______________________

d) ¿Cuál es la diferencia entre una gráfica de barras y una circular? ¿Qué ventajas crees que tiene la gráfica circular? ______________________

e) ¿Qué clase de información consideras que es recomendable presentar en una gráfica circular?, ¿y en una de barras? ______________________

f) Comenta con tu grupo las respuestas obtenidas.

1. La siguiente tabla muestra el comportamiento del dólar frente al peso, al cierre del mes de enero a lo largo de los años 2005 al 2012. Analícenla y contesten las preguntas.

Comportamiento del dólar frente al peso en los años 2005 a 2012

mes	2012	2011	2010	2009	2008	2007	2006	2005
enero	13.0581	12.135	13.0685	14.2025	10.826	11.0155	10.5593	11.1925
febrero	12.8267	12.1002	12.8253	14.9863	10.6855	11.1558	10.547	11.101
marzo	12.7755	11.9016	12.322	14.025	10.6478	11.0034	10.90	11.1928
abril	12.9644	11.5093	12.2092	13.7235	10.4933	10.9308	11.0455	11.1035
mayo	14.1563	11.5718	12.8858	13.0739	10.326	10.7435	11.3618	10.9012
junio	13.3249	11.7186	12.837	13.1397	10.3013	10.7721	11.15	10.76
julio	13.2744	11.7285	12.6513	13.2725	10.0295	10.9874	10.9853	10.61
agosto	13.3753	12.3132	13.2578	13.3753	10.2458	11.0395	10.928	10.815
septiembre	12.8167	13.7057	12.5426	13.4915	11.0067	10.9518	11.0061	10.7765
octubre	13.0828	13.2033	12.3414	13.2189	12.625	10.6648	10.7706	10.801
noviembre	12.9905	13.5433	12.4577	12.998	13.2325	10.8983	10.9765	10.566
diciembre	12.8447	13.9603	12.3451	13.067	13.96	10.9185	10.8045	10.6415

Fuente: http://www.banamex.com/economia_finanzas/es/divisas_metales/dolar_interbancario.htm (Consulta: 4 de noviembre de 2013). Actualmente la liga cuenta con datos hasta el año 2016 (consulta: 13 de enero de 2017).

a) Consideren los datos de los años 2005 a 2011. ¿Qué año tuvo en enero un cierre de tipo de cambio más bajo? ______________________
¿Y el más alto? ______________________

b) ¿En qué años hubo incremento en el tipo de cambio de diciembre a enero? ______________________

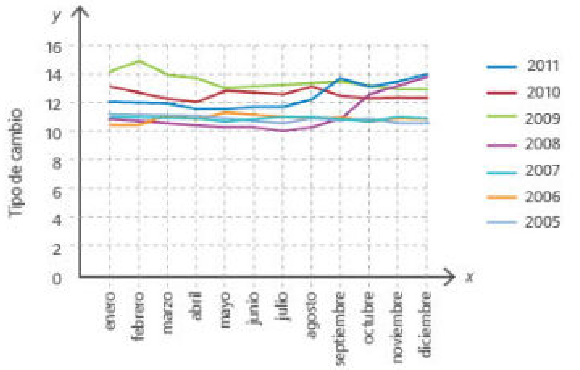
c) En sus cuadernos, construyan cualquier tipo de gráfica donde comparen la fluctuación del tipo de cambio de enero a diciembre de 2005 y enero a diciembre de 2011. Escriban en su cuaderno un texto donde describan el comportamiento de dicha gráfica.

d) Si en el primer semestre del 2011 hubieras comprado dólares, ¿en qué mes te hubiera convenido hacerlo? ______________________
¿Por qué? ______________________

e) Si en enero de 2011 alguien compró dólares con $ 3 500, ¿cuántos le dieron? ¿Por qué? ______________________

1. A continuación se muestra la gráfica que se obtuvo a partir de los datos de la tabla anterior. Analízala y contesta las preguntas.

Comportamiento del dólar frente al peso (2005 a 2011)



a) ¿Cuáles de las preguntas anteriores hubieras contestado más rápido basándote en esta gráfica? ______
¿Por qué? ______

b) ¿Cuál consideras que es la mejor manera de presentar la información anterior, con una gráfica o con una tabla? Discútelo con tus compañeros y obtén una conclusión. ______

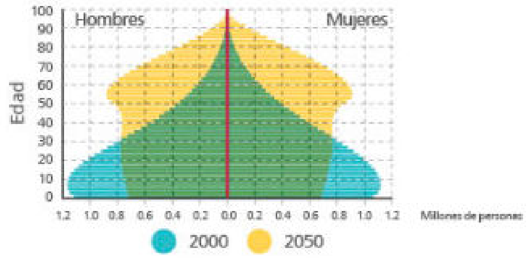
Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en el análisis de la tabla y expresó sus respuestas y conclusiones?
2. ¿Comparó sus respuestas con las de otros equipos?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención en la discusión sobre los procedimientos que utilizaron sus compañeros?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su pareja, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

1. La siguiente gráfica muestra la distribución porcentual de la población total en el año 2000, así como una proyección para el año 2050. Cada gráfica se divide en grupos, los cuales contienen la población que comparte edades en un intervalo de cinco años. Asimismo, se divide por género. Analicen y contesten las preguntas.

Pirámide de población a mitad de año, 2000 y 2050



Fuente http://www.conapo.gob.mx/work/models/CONAPO/proyecciones_estatales/Proy05–50.pdf (consulta: 23 de enero de 2017).

a) ¿Para qué grupo de edad se mantiene el mismo porcentaje en ambas gráficas? ______

b) ¿En qué grupos de edad aumenta la población tanto para hombres como para mujeres?, ¿en cuáles disminuye? ______

c) En general, ¿qué sucederá con la población de 55 años o más para el año 2050? ______

d) ¿Y con la población de menos de 30 años? ¿A qué creen que se deba esto? Explíquenlo. ______

Recuerda que las distintas representaciones estadísticas deben ser útiles para interpretar la información que contienen.

1. Una forma de representación estadística son las tablas de frecuencias en las que, de acuerdo con el fenómeno presentado, se registran los valores correspondientes a las variables que se desean mostrar.

Huéspedes recibidos por un hotel durante los últimos 8 años

Año	Huéspedes
2000	5 423
2001	6 325
2002	5 992
2003	7 142
2004	6 836
2005	8 522
2006	5 642
2007	6 731

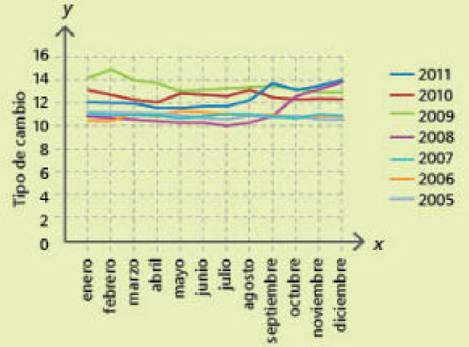
Determina al menos una conclusión respecto de la información presentada que consideres relevante para el dueño del hotel. ______

2. En una gráfica de barras se levantan barras sobre los valores de las variables o longitudes proporcionales a las frecuencias correspondientes. Se utilizan para representar datos como el número de hijos, de familias, etcétera. ¿Qué información consideras que se está organizando en la gráfica? Descríbela. ______

Distribución del número de hijos en 50 familias

3. En un diagrama circular se reparten los 360°, proporcionalmente según las frecuencias de los distintos valores de la variable. Son muy útiles cuando hay pocos valores, o cuando lo que se estudia es cualitativo; por ejemplo, gustos, aficiones, etcétera. ¿Cómo hubieras elegido 200 personas para decir que la información es relevante? ______

4. En este tipo de gráfica, llamada poligonal o polígono de frecuencias, se aprecia el comportamiento de cierto fenómeno respecto a determinados periodos. Analiza la gráfica y comenta con tus compañeros qué información se organiza.



5. En gráficas de dibujos o pictogramas se representa la información mediante un dibujo relacionado con el fenómeno del cual se habla. Se indica el valor de cada uno de esos dibujos y, de ser necesario, se divide en forma proporcional. ¿Qué información consideras que se está organizando en el pictograma? Descríbela.

____

____

1. Con tus compañeros llevarás a cabo la siguiente investigación.

a) Hagan una encuesta acerca de uno de los siguientes temas:

- Hábitos de consumo de agua potable en su familia.
- Valores que más conocen y se fomentan en la escuela donde estudian.
- Preferencias deportivas.

b) Elaboren un cuestionario con preguntas que se relacionen con el tema.

c) Con ayuda de su profesor decidan a quiénes y a cuántas personas encuestarán.

d) Reúnan los datos y ordénenlos en tablas de frecuencias absolutas y relativas.

e) ¿Qué tipo de gráfica es conveniente utilizar para presentar los datos obtenidos? ______________________
¿Por qué? ______________________

____

f) Si solamente obtuvieron gráficas de barras, poligonales o pictogramas, ¿qué modificaciones tendrían que hacer para construir una gráfica circular? ______________________

____

g) Escriban en su cuaderno por qué construyeron cada gráfica. Lean a sus compañeros sus conclusiones.

La frecuencia absoluta es el número de veces que se repite cada dato y la frecuencia relativa se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta entre el total de registro.

¡A investigar!

Consulta la dirección electrónica http://cuentame.inegi.org.mx/ (consulta: 23 de enero de 2017) y mediante tablas y gráficas presenta algunos resultados que sean de tu interés. Puedes hacer la presentación por escrito y exponerla ante el grupo.

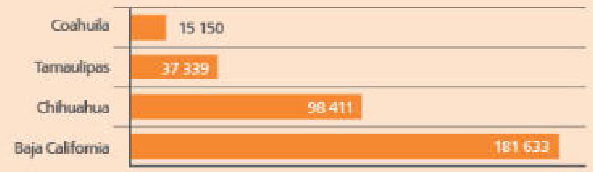
Comenta y compara tus respuestas con los demás equipos.

Tecnología

La hoja de cálculo electrónica, con su asistente para gráficos, hace posible construir gráficas a partir de los datos de una tabla. Las siguientes representaciones estadísticas explican fenómenos de migración de mexicanos; específicamente repatriación en forma ordenada y segura de Estados Unidos de América, en el periodo de enero a diciembre de 2005.

Estado	2005	(%)
Sonora	204 234	38
Baja California	181 633	33.9
Chihuahua	98 411	18.3
Tamaulipas	37 339	7.0
Coahuila	15 150	2.8
Total	536 767	100

Tecnología



1. Copia en una hoja de cálculo la información de la tabla y con ayuda del asistente para gráficos haz la gráfica de barras que te proporcionamos como ejemplo.
2. Con la tabla y el asistente para gráficos haz la gráfica circular.
3. ¿Cuál de las dos gráficas permite visualizar mejor el comportamiento del fenómeno que se presenta?, ¿por qué? ____________________
4. ¿En cuál entidad se presenta el mayor número de repatriaciones?, ¿A qué porcentaje del total equivale? ____________________
5. Compara tus respuestas y gráficas con tu grupo.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Leo y represento información en diferentes tipos de gráficas.			
Obtengo datos a partir de una gráfica.			
Elijo herramientas convenientes para representar información estadística.			

¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades?
¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño?
¿Cómo apliqué los razonamientos matemáticos involucrados en esta lección en la resolución de problemas?
Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:

Recuerda que en la medida en que identifiques tus debilidades y fortalezas, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

En equipo

1. En una encuesta se preguntó a los alumnos de una escuela secundaria qué hacían en su tiempo libre. Los resultados obtenidos se registraron en la siguiente tabla de frecuencias:

Pasatiempo	Número de alumnos
basquetbol	27
fútbol soccer	64
volibol	41
fútbol americano	9
jugar videojuegos	97
leer	32
chatear	57

a) ¿Qué actividad hace en su tiempo libre la mayoría de los alumnos? ____________________

b) ¿A cuántos alumnos se les aplicó la encuesta? ____________________

c) ¿Qué tipo de gráfica representaría mejor la información que se muestra en la tabla de frecuencias? ____________________

d) Tracen en su cuaderno una gráfica que represente la información de la tabla.

2. Al comparar su gráfica con otros equipos, ¿algunos realizaron el mismo tipo de gráfico? ____________________

¿Cuál es el tipo de gráfico que hicieron más? ____________________

¿Consideran que dicho tipo es el más adecuado? ¿Por qué? ____________________

Conexiones

Relaciones matemáticas

Las matemáticas constituyen una herramienta fundamental en distintas ciencias; por ejemplo, en la astronomía ya sea para describir el movimiento de los planetas y los fenómenos o para predecir los eclipses. Carl Sagan (1934-1996) fue un popular astrónomo y divulgador científico. Pionero en campos como la exobiología y promotor del proyecto SETI (Búsqueda de Inteligencia Extraterrestre), durante toda su vida intentó mostrar a la ciencia como una manera de pensar y descubrir el mundo. Él decía que una de las constantes de cualquier civilización inteligente es el haber llegado a poseer determinado conocimiento matemático. “Las relaciones matemáticas deben ser válidas para todos los planetas, biologías, culturas y filosofías […] no podemos imaginar una civilización en la que uno más uno no sean dos o haya un número entero entre el ocho y el nueve. Por esta razón, las relaciones matemáticas sencillas pueden ser incluso un mejor medio de comunicación entre las diversas especies de la física y la astronomía”.

Carl Sagan (1934-1996)

Desde la antigüedad, el hombre ha observado que distintos objetos y fenómenos que aparecen en la naturaleza están relacionados entre sí, lo que posibilita establecer una correspondencia de causa-efecto entre ellos. Por lo anterior, entender los conceptos de relación y de función es de suma importancia. Por ejemplo, en matemáticas, una función es el término usado para indicar la relación o correspondencia entre dos o más cantidades.

Las matemáticas son una herramienta útil para describir el movimiento de los planetas.

Actividad

En grupo y con el apoyo de su profesor, comenten los siguientes aspectos.

a) ¿Qué tipo de relaciones matemáticas conocen?

b) ¿Qué relaciones matemáticas han expresado de manera algebraica y gráfica?

c) Al establecer relaciones matemáticas, ¿qué necesitan hacer para revisar si una expresión matemática es correcta o no?

Después de sus comentarios mencionen sus conclusiones acerca de las ventajas de estudiar las relaciones matemáticas para mejorar en aspectos como la modelación de distintos fenómenos de la naturaleza para su investigación.

Evaluación tipo PISA

Experimentos

1. Escribe en cada caso qué tipo de eventos son eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes y por qué.

   a) Experimento: "Lanzamiento de un dado"
   Evento $B = \{3\}$ Evento $C = \{4, 6\}$
   Los eventos B y C son: ________ porque ____________

   b) Experimento: "Lanzamiento de un dado"
   Evento $D = \{1, 3, 5\}$ Evento $F = \{2, 4, 6\}$
   Los eventos D y F son: ________ porque ____________

   c) Experimento: "Lanzamiento de un dado y una moneda"
   Evento $G = \{6, A\}$ Evento $H = \{(1, S), (2, S), (3, S), (4, S), (5, S)\}$
   Los eventos G y H son: ________ porque ____________

Eventos

1. Considera la siguiente información.

Casos	Probabilidad
A y B son excluyentes si...	$P(A \text{ y } B) = 0$
A y B son independientes si...	$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$

   a) Si $P(A) = 0.45$, $P(B) = 0.10$ y $P(A \text{ y } B) = 0.045$, ¿los eventos A y B son mutuamente excluyentes? Da argumentos matemáticos.

   b) ¿Son independientes los eventos A, B? Da argumentos matemáticos.

2. Sea el experimento de lanzar una moneda dos veces y registrar los resultados. Denotamos A, B y C.

   $A = \{$que aparezca Sol en el primer lanzamiento$\}$
   $B = \{$que aparezca Sol en el segundo lanzamiento$\}$
   $C = \{$que aparezca Sol solamente una vez$\}$

   ¿Se puede decir que los eventos A, B, C son mutuamente excluyentes? Escribe argumentos matemáticos. ____________

3. Considera que un espacio muestral contiene cinco resultados experimentales igualmente posibles: $E1$, $E2$, $E3$, $E4$, $E5$, y sean los eventos:

   $A = \{E1, E2\}$
   $B = \{E3, E4\}$
   $C = \{E2, E3, E5\}$

   a) Encuentra: $P(A) =$ $P(B) =$ $P(C) =$ $P(A \text{ o } B) =$

   b) ¿Son A y B mutuamente excluyentes? Anota argumentos matemáticos. ____________

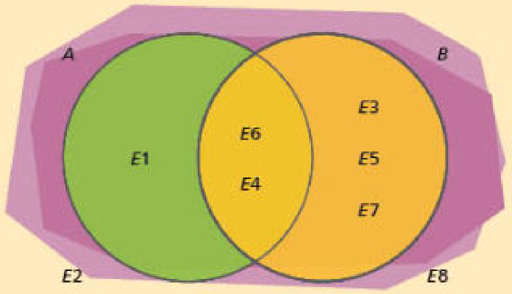
   c) Encuentra: $A^c =$ $C^c =$ $P(A^c) =$ $P(C^c) =$

   d) ¿Son A^c y C^c mutuamente excluyentes? Da argumentos matemáticos. ____________

Espacio muestral

1. Un experimento genera un espacio muestral que contiene ocho eventos: $E1, E2, \ldots, E8$. Los eventos A y B se definen así:

   $A = \{E1, E4, E6\}$
   $B = \{E3, E4, E5, E6, E7\}$



   a) ¿Son los eventos A y B mutuamente excluyentes? Da argumentos matemáticos. ____________

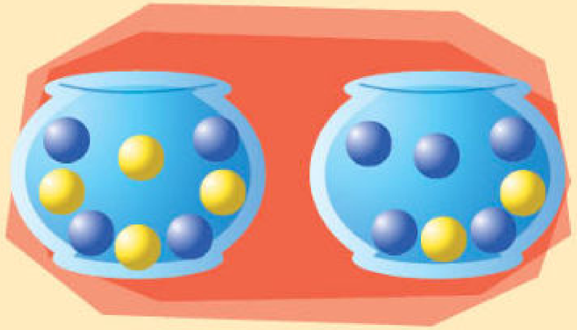
   b) ¿Son los eventos A y B independientes? Da argumentos matemáticos. ____________

   c) ¿Los eventos A y B son complementarios? Da argumentos matemáticos. ____________

   d) ¿Cuál es la probabilidad de $(A \text{ y } B)$? ____________

Urnas

1. Se tienen dos urnas con las canicas de la imagen.



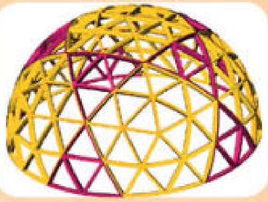
   La probabilidad de que se extraiga aleatoriamente una canica amarilla de cada urna es:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) - P(B)$$
$$= \left(\tfrac{4}{8}\right)\left(\tfrac{2}{7}\right) = \tfrac{8}{56}$$
$$= \tfrac{1}{7}$$

¿Los eventos A y B son independientes? Escribe argumentos matemáticos. ____________

BLOQUE 2

Sentido numérico y pensamiento algebraico



Forma, espacio y medida

Manejo de la información

Aprendizajes esperados

Al finalizar el estudio de este bloque podrás:

- Explicar el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identificar las propiedades que se conservan.
- Resolver problemas que implican el uso del Teorema de Pitágoras.

Introducción

En este bloque resolverás problemas en distintos contextos donde será necesario plantear y resolver ecuaciones cuadráticas; por ejemplo, cómo diseñar una caja con ciertas características sin que haya mucho desperdicio de material. Además, descubrirás que existe una herramienta algebraica que te permitirá resolver ecuaciones de una manera más eficaz.

Por otra parte, estudiarás la forma de construir diseños geométricos al combinar distintos tipos de transformaciones geométricas; verás que al combinar las propiedades de traslación y rotación se diseñan logotipos geométricos.

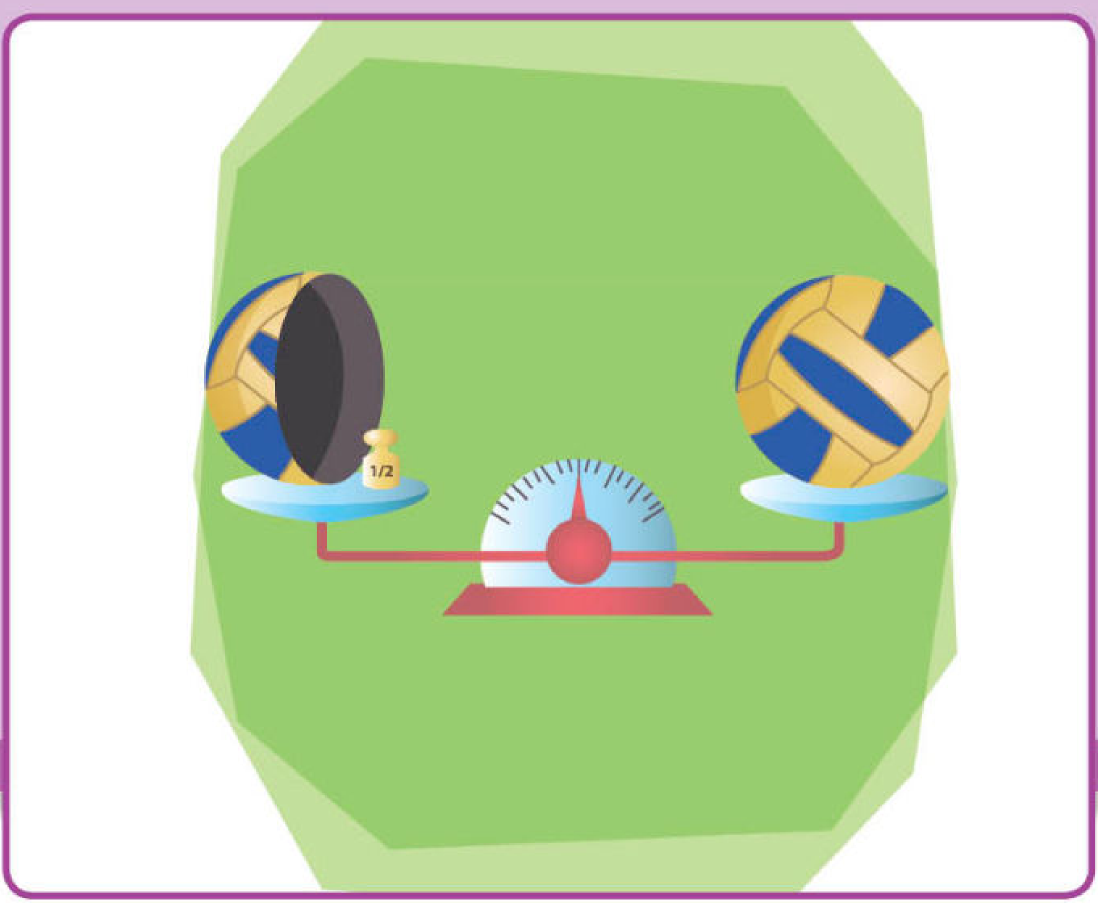
Además, descubrirás una relación muy famosa que se da en los triángulos rectángulos y que tiene aplicaciones en situaciones que, como verás más adelante, implica determinar longitudes o distancias.

También continuarás estudiando el cálculo de probabilidades, en esta ocasión analizarás el tipo de eventos y la ocurrencia. De este modo, averiguarás si ciertos eventos pueden o no ocurrir al mismo tiempo.

¡Planteamiento del acertijo!

El fiel de la balanza

- Un balón de fútbol pesa $\frac{1}{2}$ kilogramo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa?
- Proporciona argumentos que validen tu respuesta.



PROYECTO

2

Teorema de Pitágoras

En este proyecto tus compañeros y tú explorarán el Teorema de Pitágoras. Para ello, sigan las instrucciones que se presentan a continuación.

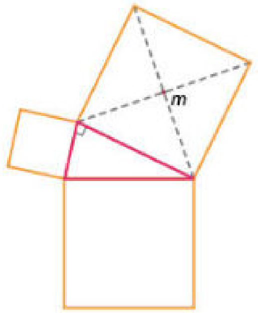
Lo que necesitan:
- 1 pliego de cartulina
- Juego de geometría
- Lápiz
- Plumones
- Tijeras

1. Construyan en cartulina los siguientes rompecabezas.

a) Tracen un triángulo rectángulo cuyos lados sean de diferente medida.

b) Sobre cada uno de los lados del triángulo rectángulo construyan un cuadrado.

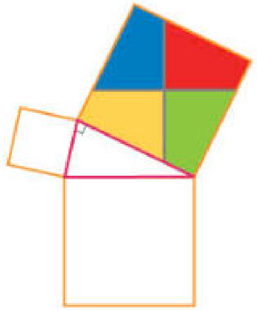
c) Localicen el punto donde se cortan las diagonales del cuadrado mediano. Llámenlo *m*.



d) Tracen una recta paralela al lado mayor del triángulo rectángulo que pase por el punto *m*.

e) Tracen una recta paralela a cualquiera de los lados del cuadrado mayor, que pase por el punto *m*.

f) Recorten el cuadrado pequeño y las piezas del cuadrado mediano y con ellas formen el cuadrado mayor.



2. Construyan un triángulo rectángulo isósceles.

a) Dibujen un cuadrado sobre cada uno de sus lados.

b) Tracen todos los ejes de simetría del cuadrado mayor.

c) Recorten los triángulos que se forman y acomódenlos en los cuadrados pequeños.

3. Contesten las preguntas en su cuaderno:

a) ¿Pudieron acomodar todas las piezas de los rompecabezas como se indicó?

b) ¿Qué relación observan entre las áreas de los cuadrados que se construyen y los lados de los triángulos? Descríbanla.

c) ¿Esto se cumple para cualquier triángulo rectángulo?, ¿por qué?

4. Si no pueden responder algunas de las preguntas de este proyecto, no se preocupen, realicen las actividades de la lección 12. Después, retomen el proyecto y traten de responder todos los planteamientos que se hacen. Justifiquen sus respuestas.

Factorización

Programa

Eje: *Sentido numérico y pensamiento algebraico*
Tema: *Patrones y ecuaciones*
Contenido: *Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.*

1. Completa la siguiente tabla en la que se muestra la relación entre el lado de un cuadrado y su área.

Medida del lado	Área
1	1
2	
3	9
4	
5	
x	

a) ¿Cuál es el área del cuadrado cuya medida de su lado es x? Justifica tu respuesta. ______

b) Si se sabe que el área de un cuadrado es igual a 8 veces la medida de su lado. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado? Justifica tu respuesta.
______

c) Si el área de un cuadrado es igual a 12 veces la medida de su lado, ¿cuál es la expresión algebraica que representa esta relación? Argumenta tu respuesta. ______

d) Describe un procedimiento que te permita obtener la medida del lado del cuadrado. ______

e) Compara tu procedimiento con los de tus compañeros e identifiquen si factorizaron correctamente para resolver las ecuaciones planteadas.

2. El doble del área de un cuadrado menos seis veces la medida de su lado es igual a cero.

a) Si el lado del cuadrado es x, ¿cómo se representa el doble del área del cuadrado? ¿Y seis veces la medida del lado? ______

b) Utiliza las expresiones del inciso anterior para escribir una ecuación que represente el enunciado del problema. Argumenta tu respuesta.
______

c) Identifica un factor común y expresa el primer miembro de la ecuación como el producto de dos factores. Argumenta tu respuesta. ______

d) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado? Describe el procedimiento que utilizaste para obtener esta medida. ______

e) Compara tus respuestas con las de tus compañeros y valida la estrategia que utilizaste para obtener la medida del lado del cuadrado. Identifica cuántos valores de la incógnita se obtienen al resolver una ecuación cuadrática y cuál de ellos es válido para la resolver el problema planteado.

Al margen
La solución de las ecuaciones de segundo grado se remonta a la cultura babilónica.
Por ejemplo, en la tablilla cuneiforme BM13901 de la cultura babilónica (año 2000 a.n.e.) se encuentra una evidencia, la solución de un problema con ecuaciones de segundo grado:

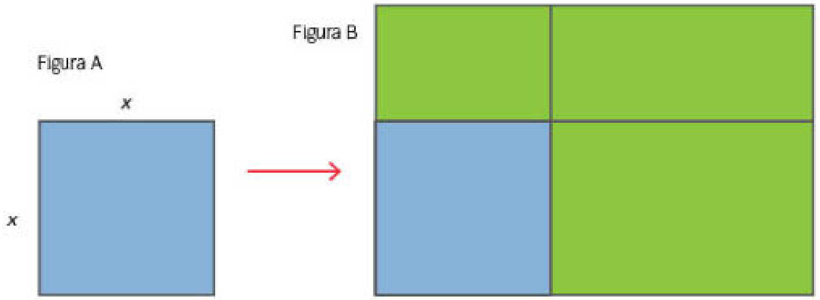
He sumado el área y el lado de un cuadrado y he obtenido: $\frac{3}{4}$.

$x^2 + x = \frac{3}{4}$

¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

Tablilla cuneiforme con 17 problemas matemáticos.

1. Formen equipos de cuatro integrantes y resuelvan el siguiente problema. A un cuadrado (figura A) se le aumentan 7 cm de largo y 3 cm de ancho, con lo que se forma un rectángulo (figura B) cuya área es $x^2 + 10x + 21$.



a) ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo construido (figura B)? Justifiquen su respuesta. ______

______

Base: ______ Altura: ______

b) Verifiquen que al multiplicar la base por la altura se obtiene $x^2 + 10x + 21$. ¿Qué relación observan entre las dimensiones que se le aumentan al largo y ancho del cuadrado con los coeficientes del término lineal y el término independiente? ______

______

c) Si el área de un rectángulo similar al de la figura B, es $x^2 + 9x + 18$, ¿cuántos centímetros aumentaron de largo y de ancho según el cuadrado original? Validen su respuesta utilizando la relación que observaron en el inciso anterior. ______

d) Si el área $x^2 + 9x + 18$ es igual a 40 cm², ¿cuántos centímetros mide de largo y de ancho el rectángulo? Justifiquen su respuesta. ______

______

______

e) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Identifiquen los elementos que deben considerarse para factorizar un trinomio con las características de los que trabajaron en estas actividades.

2. Sabemos que el perímetro de un rectángulo es de 60 cm. Completen la siguiente tabla en la que se muestran algunas medidas para cada uno de los lados del rectángulo. Escriban únicamente números enteros.

Lado *a*	10			1	18		22	11	
Lado *b*		1	3		12	20			5

a) Si el área de uno de los rectángulos es de 176 cm², ¿cuáles son sus dimensiones? Justifiquen su respuesta. ______

______

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas, explicando por qué piensan así:

1. ¿Obtuvo las dimensiones de un rectángulo a partir de su área indicada mediante una expresión algebraica?
2. ¿Identificó cómo resolver una ecuación cuadrática utilizando la factorización?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros?

b) Para obtener las dimensiones del rectángulo cuya área es de 144 cm², Andrés planteó lo siguiente:

Lado *a*: x **Lado *b***: $30 - x$

$$\begin{aligned} x(30 - x) &= 144 \\ 30x - x^2 &= 144 \\ x^2 - 30x &= -144 \\ x^2 - 30x + 144 &= 0 \\ (x - 24)(x - 6) &= 0 \end{aligned}$$

c) Analicen el procedimiento anterior y a partir de él obtengan las dimensiones del rectángulo. Argumenten su respuesta. ______

______

______

d) Utilicen el mismo procedimiento y obtengan las dimensiones de un rectángulo cuya área es 209 cm². ______

______

______

e) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y, utilizando el procedimiento planteado por Andrés, verifiquen que los datos que anotaron en la tabla cumplen con lo indicado en el problema.

3. La edad de Claudia multiplicada por la de su hermano, que es un año mayor, da como resultado siete veces la edad de ella.

a) Representen algebraicamente lo que se indica a continuación.

- La edad de Claudia. ______
- La edad del hermano de Claudia. ______
- El producto de la edad de Claudia por la edad de su hermano. ______
- Siete veces la edad de Claudia. ______

b) ¿Cuál es la ecuación que representa el problema? ______

c) ¿Cuáles son las edades de Claudia y de su hermano? ______

d) Comparen sus respuestas con otros equipos y describan cómo resolvieron la ecuación que les permitió obtener la edad de Claudia y la de su hermano.

Una ecuación de segundo grado es toda aquella expresión algebraica de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b, c son números reales dados, a la vez que x es una incógnita.

- Las ecuaciones de segundo grado pueden ser *completas* e *incompletas*. Las primeras son aquellas en las que a, b, c son diferentes de cero; por ejemplo, $x^2 + 6x - 55 = 0$; donde $a = 1$, $b = 6$ y $c = -55$.

- Una ecuación incompleta es aquella en la que *b* o *c* son igual a cero, por ejemplo:

$$x^2 + 6x = 0; \text{ donde } a = 1, b = 6 \text{ y } c = 0.$$
$$x^2 - 16 = 0; \text{ donde } a = 1, b = 0 \text{ y } c = -16.$$

Una forma de resolver una ecuación cuadrática completa, de la forma $x^2 + bx + c = 0$, consiste en factorizar el trinomio de segundo grado. Ejemplo:

$x^2 + 2x - 8 = 0$ $\quad b = 2$ $\quad c = -8$

$(x \quad)(x \quad) = 0$ Hay que buscar una pareja de números que al sumarlos den como resultado el valor de *b* y al multiplicarlos nos den el valor de *c*. En este caso, *dos números que sumen 2 y cuyo producto sea* -8.

$(x + 4)(x - 2) = 0$ Los números son $(+4)$ y (-2), ya que $(+4) + (-2) = 2$ y $(+4)(-2) = -8$.

- Ahora, se iguala cada uno de los factores anteriores con cero y se resuelven las ecuaciones.

$x + 4 = 0$	$x - 2 = 0$
$x = 0 - 4$	$x = 0 + 2$
$x = -4$	$x = 2$

Éstas son las dos soluciones de la ecuación cuadrática.

1. ¿Cuál sería el procedimiento para resolver una ecuación cuadrática cuando *b* o *c* son igual a cero? ______________________________

¡A investigar!

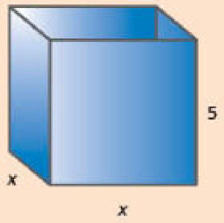
Consulta la siguiente dirección electrónica: http://ponce.inter.edu/cremc/cuadratica.html (Consulta: 13 de enero de 2017). A partir de la revisión, contesta las siguientes preguntas.

- ¿Cuáles son las tres formas que se mencionan para hallar las soluciones o raíces de una ecuación cuadrática? ______________________________
- ¿Cuál de ellas te resulta más práctica? Argumenta tus razones. ______________________________

Comparte con tus compañeros los resultados de tu investigación y propongan algunas ecuaciones de segundo grado para que las resuelvan.

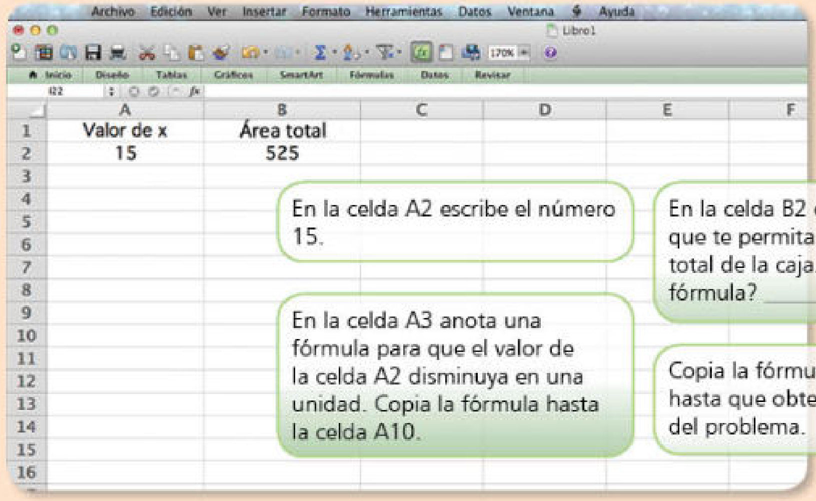
Tecnología

1. Una empresa produce cajas de lámina en forma de prisma con base cuadrada sin tapa para colocar anillos en una tienda departamental. Si se necesita que el total de material empleado para cada caja, sin tener en cuenta el desperdicio, sea de 76 cm^2 y que cada pieza tenga una altura de 5 cm, ¿cuál debe ser la medida de los lados de la base de la caja? ______________________________



a) Escribe una expresión que represente el área de la base de la caja. ______________________________

b) Anota una expresión que represente el área total de la caja. ______________________________



En la celda A2 escribe el número 15.

En la celda A3 anota una fórmula para que el valor de la celda A2 disminuya en una unidad. Copia la fórmula hasta la celda A10.

En la celda B2 escribe la fórmula que te permita obtener el área total de la caja. ¿Cuál fue esa fórmula? ______________

Copia la fórmula hacia abajo hasta que obtengas la solución del problema.

2. Con base en los datos obtenidos en la tabla de la hoja de cálculo, contesta las preguntas.

a) ¿Qué valor de la columna B da respuesta al problema? Justifica su respuesta. ______________________________

b) Copia los valores hacia abajo hasta obtener otro valor que satisfaga las condiciones del problema. ¿Cuál es ese otro valor? Argumenta tu respuesta. ______________________________

c) ¿Los dos valores son soluciones del problema? Justifica tu respuesta. ______________________________

d) Compara tus respuestas con otros compañeros y verifica que las fórmulas ingresadas sean correctas y permitan dar respuesta a los planteamientos del problema.

1. Resuelve los siguientes problemas por medio de la factorización.

a) Luis es cinco años mayor que Juan; si el producto de sus edades es 126, ¿cuál es la edad de cada uno? ______

b) Considera un terreno en forma rectangular cuya área es de $x^2 - 19x + 90$. Determina las dimensiones del terreno. ______

c) Adrián reparte 35 revistas entre sus amigos, para lo cual da a cada uno tantas revistas como amigos son, más dos revistas. ¿Cuántos amigos tiene? ______

d) El producto de dos números consecutivos es 600. ¿Cuáles son esos números? ______

e) ¿Cuáles son las dimensiones de un triángulo cuya base es $x + 2$, altura $x + 4$ y su área es 84 cm^2? ______

f) Un rectángulo tiene un área de 24 cm^2. Si se sabe que uno de sus lados mide 5 cm más que el otro, ¿cuál es la medida de su perímetro? ______

2. Resuelve, por factorización, las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $8x^2 + 12 = 0$

b) $x^2 + 6x + 8 = 0$

c) $m^2 - 6 = -m$

d) $36 + 12y = -y^2$

e) $a^2 - 10a + 25 = 0$

3. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y en caso de presentar diferencias, analízalas con el apoyo de tu profesor.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Identifico la expresión algebraica que permite resolver un problema.			
Utilizo las ecuaciones cuadráticas para modelar las situaciones que se me plantean.			
Utilizo la factorización para resolver problemas que se modelan mediante ecuaciones cuadráticas.			

¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades?
¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño?
¿Cómo demostré disposición para el estudio de los contenidos de esta lección?
Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:

Recuerda que en la medida en que realices esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

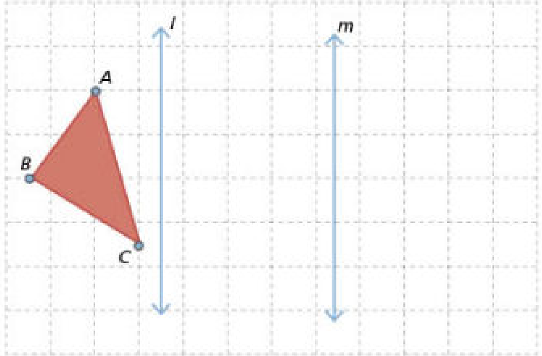
Rotación y traslación de figuras

Programa

Eje: *Forma, espacio y medida*
Tema: *Figuras y cuerpos*
Contenido: *Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.*

La geometría no sólo estudia las figuras y sus propiedades, sino también los movimientos de las mismas; es decir, las figuras pueden sufrir una transformación por simetría, rotación o traslación.

1. Traza la figura simétrica al triángulo *ABC* con respecto a la recta *l*, nombra los puntos de la figura resultante *A´*, *B´* y *C´*, respectivamente. Después traza otra figura simétrica al triángulo *A´B´C´* pero con respecto a *m*; llama a los puntos de la figura resultante *A"*, *B"* y *C"*, respectivamente. Luego, contesta las siguientes preguntas.



a) ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre los triángulos *ABC* y *A´B´C´*? ______

b) ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre los triángulos *ABC* y *A"B"C"*? ______

c) ¿Cuáles de los tres triángulos tienen la misma orientación? ¿Por qué? ______

d) ¿Cómo son entre sí las distancias de *A* a *l* y de *l* a *A'*? ¿Y la de *B* a *l* y de *l* a *B'*? Justifica tu respuesta. ______

e) En términos generales, ¿qué cambios sufre la figura inicial al aplicar dos simetrías axiales? ______

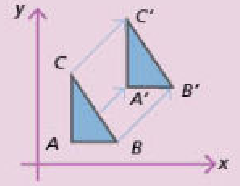
2. Reúnete con un compañero y comparen sus respuestas. Discutan qué procedimiento aplicarían para obtener la tercera figura a partir de la primera, pero sin trazar la segunda. Luego, respondan: en una doble simetría donde los ejes de simetría son rectas paralelas, ¿la figura que resulta es una traslación de la figura original? Argumenten sus respuestas y escriban una conclusión al respecto. ______

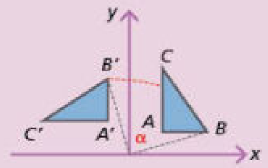
Al margen

Las transformaciones geométricas permiten crear una nueva figura a partir de una previamente dada. La nueva figura se llamará "homólogo" y se clasifica como:
Directa: conserva el sentido del original en el plano cartesiano.
Inversa: el sentido del homólogo y del original son contrarios y se pueden clasificar en:

- Isométricas: el homólogo conserva las dimensiones y ángulos.
- Isomórficas: el homólogo conserva la forma y los ángulos.
- Anamórficas: cambia la forma de la figura original.

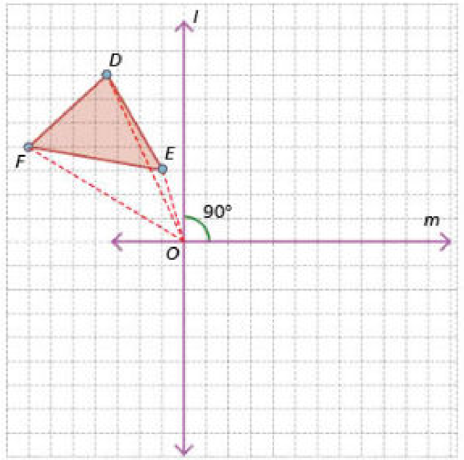
¿Qué tipo de transformación tienen las siguientes figuras?



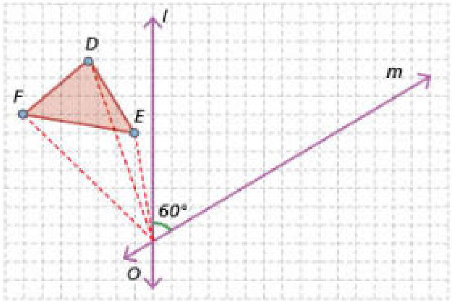


3. En cada caso, traza la figura simétrica al triángulo *DEF* con respecto a la recta *l*. Llama a los puntos de la figura resultante *D'*, *E'* y *F'*, respectivamente. Después traza otra figura simétrica al triángulo *D'E'F'*, pero con respecto a la recta *m*. Nombra a los puntos de la figura resultante *D''*, *E''* y *F''*, respectivamente. Una vez que hayas terminado tus trazos, responde lo que se pregunta a continuación.

Caso 1



Caso 2



En cada caso:

a) ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre los triángulos *DEF* y *D'E'F'*?

b) ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre los triángulos *DEF* y *D''E''F''*?

c) Une con un segmento *O* con *D'*, *O* con *E'* y *O* con *F'*, ¿cuál es la medida del ángulo *DOD'*? ¿Y la del ángulo *EOE''*? ¿Y la de *FOF''*? ______

d) Une con un segmento *O* con *D''*, *O* con *E''* y *O* con *F''*, ¿cuál es la medida del ángulo *DOD''*? ¿Y la del ángulo *EOE''* ? ¿Y la de *FOF''*?

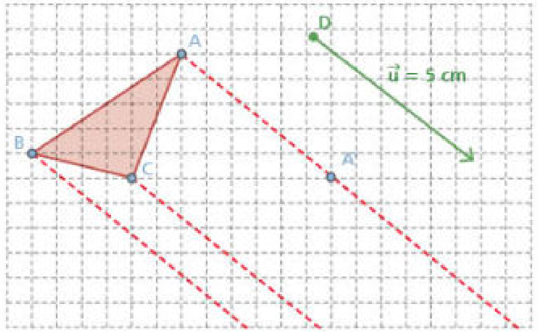
Rectas oblicuas son dos rectas que se cruzan sin formar ángulos rectos.

4. Compara tus respuestas con las de otros compañeros y comenta qué sucede con la figura original si se aplica una doble simetría axial, donde los ejes de simetría son rectas perpendiculares y cuando son rectas oblicuas. Justifica tus respuestas. Luego, indica si las siguientes propiedades se cumplen con la simetría axial.

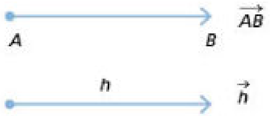
- Un punto se transforma en otro punto.
- Una recta se transforma en una recta no paralela.
- Un segmento se transforma en un segmento no paralelo e igual.
- Un ángulo se transforma en un ángulo igual.

Realicen lo que se pide a continuación:

1. El siguiente trazo corresponde al traslado del triángulo *ABC*, de acuerdo con el vector $\vec{u}$. Completen los trazos para obtener el triángulo *A'B'C'*. Luego, respondan las preguntas.



Un vector es un segmento orientado. Para representar un vector, se utilizan las siguientes formas:



Los elementos de un vector son:
Dirección: la cual puede ser horizontal, vertical u oblicua.
Orientación o sentido: puede ser hacia la derecha, hacia la izquierda, hacia arriba y a la derecha, hacia arriba, hacia arriba y a la izquierda, hacia abajo, hacia abajo y a la derecha, hacia abajo y a la izquierda.
Magnitud: es la medida del vector, se denota por $|\vec{u}|$.

a) ¿Cuándo un punto se transforma en un punto? ______

b) ¿Cuándo un segmento se transforma en un segmento paralelo y congruente? ______

c) ¿Cuándo una figura se transforma en otra de la misma forma y dimensión? ______

d) ¿Cuándo un ángulo se transforma en otro ángulo congruente?

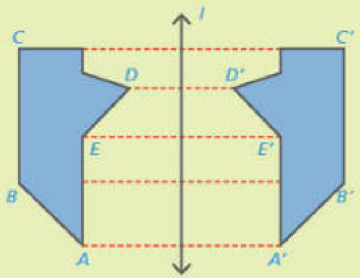
1. Lean detenidamente la siguiente información. Al terminar, respondan lo que se pregunta.

Las isometrías de figuras (*iso*: igual, *metría*: medida) son transformaciones en las que no cambia el tamaño ni la forma de la figura, sino sólo su posición.

Dentro de las isometrías más comunes están las siguientes:

- La reflexión con respecto a un eje que produce simetría axial es la reflexión de una figura a partir de una recta llamada eje de simetría.

La figura *ABCDE* es simétrica a la figura *A'B'C'D'E'* con respecto a la recta *l*, ya que si doblamos en dicha recta las partes de ambas figuras hay coincidencia.



- La reflexión con respecto a un punto que produce la *simetría central* es aquella en la que una figura es simétrica a otra respecto de un punto (centro de simetría). La simetría central equivale a una rotación de 180°.

  La simetría central de una figura puede ser respecto a un punto externo a ella como en la figura 1, o por uno de sus vértices como en la figura 2.

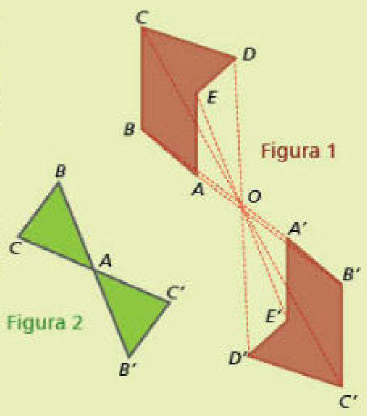
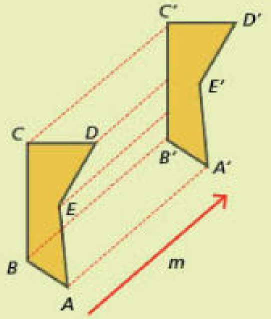


Figura 1
Figura 2

- La figura *ABCDE* (figura 1) es simétrica a *A'B'C'D'E'* con respecto al punto *O*, ya que cualquier segmento que va de un punto de la figura a su homólogo en la figura simétrica pasa por *O*, que es el punto medio del segmento.

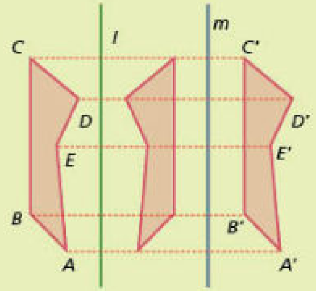
La traslación es el desplazamiento de una figura a lo largo de una misma dirección. Cada uno de sus puntos se desplaza en la misma distancia y en la misma dirección.

- La figura *ABCDE* se trasladó respecto a la longitud y dirección de la directriz *m*. Para ello, se trazan rectas paralelas a la directriz por cada vértice de la figura y se considera la longitud de la directriz a partir de cada vértice de la figura, el resultado son los vértices de la figura trasladada *A'*, *B'*, *C'*, *D'* y *E'*.

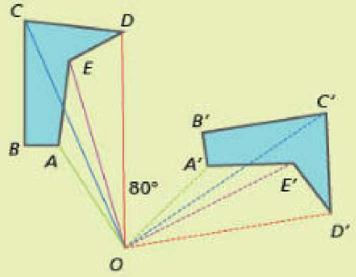


El resultado de aplicar una doble reflexión a una figura respecto a dos ejes paralelos, es una traslación.

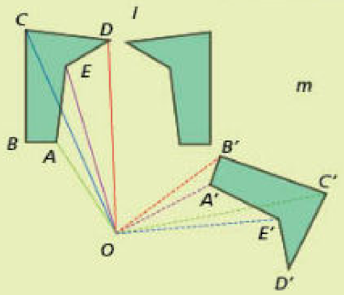
Si a una figura se le aplica una doble reflexión, la figura original se traslada el doble de la distancia entre los dos ejes.



La *rotación* es la acción de desplazar una figura cierta cantidad de grados alrededor de un punto que sirve como centro de giro.



Para la rotación de una figura se une cada vértice de la misma con el centro de giro *O*. Después se trazan arcos con centro en O tomando como radios las distancias de *O* a cada vértice. Luego se forman ángulos de la misma medida que el ángulo de giro.



a) El resultado de aplicar una doble reflexión a una figura respecto de dos ejes que se cortan en un punto llamado *O*, ¿es una rotación con centro en *O*? ____________ Expliquen por qué. ____________

b) Al aplicar una doble reflexión a una figura respecto a ejes que se cortan en un punto *O*, ¿el ángulo de rotación es el doble del ángulo formado por la intersección de los ejes en el punto *O*? ____________ ¿Por qué? ____________

c) Cuando una figura se obtiene rotando otra, ¿los vértices correspondientes equidistan del centro de rotación y se conservan las medidas de los lados y de los ángulos de la figura original? ____________ Expliquen. ____________

2. Comparen sus respuestas con las de otros equipos y en grupo, escriban una conclusión general sobre las preguntas de los incisos *a* y *b*. ____________

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en dar respuesta a las preguntas acerca del resultado de aplicar una doble simetría axial?
2. ¿Verificó con otros equipos sus respuestas?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de otros compañeros?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su compañero, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

¡A investigar!

Investiga en algún libro de geometría o en internet en qué consisten las transformaciones isométricas. Por ejemplo, en la siguiente página electrónica puedes encontrar información: http://www.slideshare.net/mirandamolina/sesion-2-presentacion (Consulta: 13 de enero de 2017).

Expón ante el grupo tu investigación.

Tecnología

1. Visita las siguientes páginas electrónicas para reafirmar tus conocimientos al manipular figuras relacionadas con traslación y rotación.

a) http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/movi30.htm (Consulta: 13 de enero de 2017).

b) http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/movi40.htm (Consulta: 13 de enero de 2017).

Tecnología

c) http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/movi50.htm
(Consulta: 13 de enero de 2017).

d) http://www.geometriadinamica.cl/2010/03/teselaciones-radiales/
(Consulta: 13 de enero de 2017).

2. Comenta tu experiencia con tus compañeros.

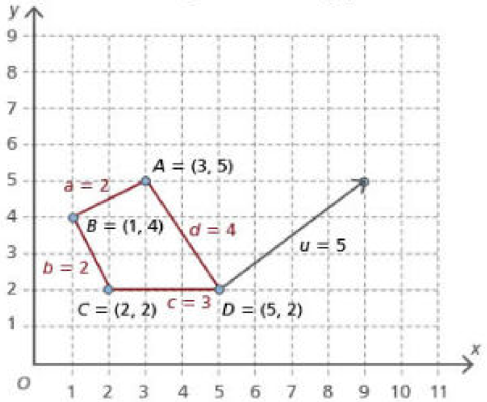
Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

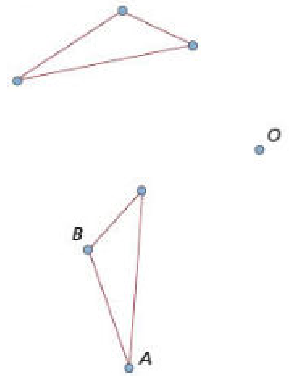
Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓) Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Reconozco que existen varios tipos de transformaciones (axial, rotación y traslación).			
Reconozco que el resultado de aplicar una doble reflexión a una figura respecto a dos ejes que se cortan en un punto llamado *O* es una rotación con centro en *O*.			
Reconozco que al aplicar una doble reflexión a una figura respecto a ejes que se cortan en un punto *O*, el ángulo de rotación es el doble del formado por la intersección de los ejes en el punto *O*.			
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades? ¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño? Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:			

Recuerda que en la medida en que realices esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

1. Dibuja la traslación del cuadrilátero *ABCD* de acuerdo con el vector indicado. Escribe las coordenadas de los vértices del cuadrilátero *A'B'C'D'* y luego, comprueba si los segmentos *AA'* y *BB'* son de igual medida y paralelos.



2. Los siguientes triángulos se obtuvieron al realizar un giro. Encuentra los vértices correspondientes a los vértices *A* y *B*, nómbralos *A'* y *B'* en el otro triángulo. Encuentra el punto *C* sobre el que se hizo el giro y calcula de cuánto es el ángulo de giro.



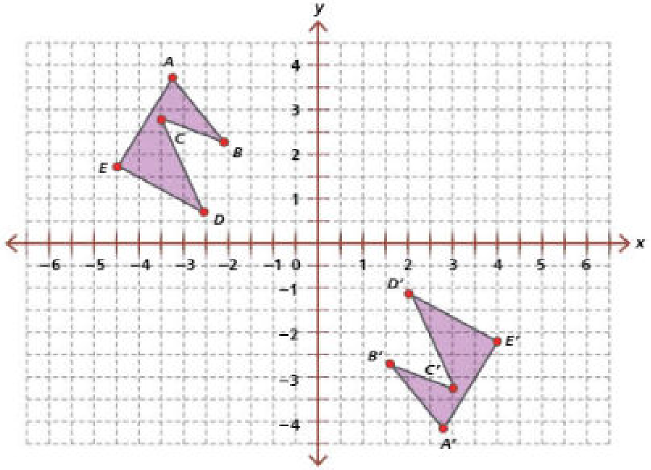
3. Compara tus trazos con los de algunos compañeros, ¿son iguales? ¿Llegaron a la misma conclusión del planteamiento que se hace del primer problema? ¿Cómo fue que determinaron la media del ángulo de giro del segundo problema? ______

Diseños que combinan simetría axial y central

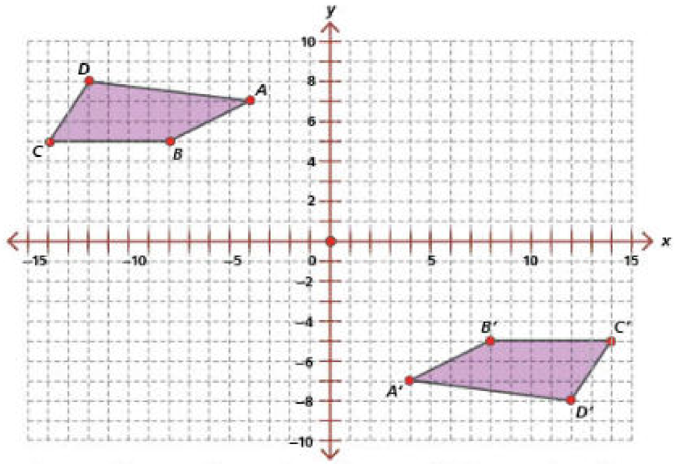
Programa

Eje: *Forma, espacio y medida*
Tema: *Figuras y cuerpos*
Contenido:
Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

1. Organizados en parejas, determinen cuáles transformaciones, ya sean rotaciones o traslaciones, se realizaron para obtener una nueva figura. Señalen con color *rojo* las trayectorias de los vértices de las figuras y con color *azul* el punto de rotación, el eje de simetría o la directriz, según corresponda.



a) ¿Qué tipo de transformación sufrió el polígono *ABCD* para obtener *A'B'C'D'*? ______

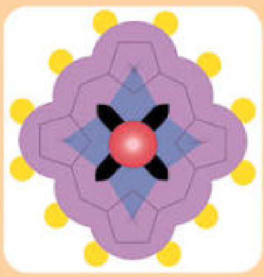


b) ¿Cuál transformación convierte el polígono *ABCD* en el polígono *A'B'C'D'*? ______

c) Si se pretende obtener el polígono *A'B'C'D'* a partir de dos transformaciones del polígono *ABCD*, ¿cuáles se deben aplicar?

Al margen

Muchos objetos en la naturaleza contienen distintas simetrías.
En la siguiente figura encontramos varios ejes de simetría por su centro (horizontal y vertical).
La imagen representa el núcleo central del grupo *hemo*, que es el centro activo de la hemoglobina (líneas negras) que oxigena nuestras células. El átomo de hierro es rojo, los azules son de nitrógeno y los morados, átomos de carbono. Indaga sobre algún objeto, lugar o situación a tu alrededor que tenga simetría, coméntalo en clase.



Núcleo central del grupo *hemo*.

2. Discutan sus respuestas con sus compañeros de grupo, validando cada una de ellas. Si existen distintos tipos de combinaciones de transformaciones con los que se puedan obtener las nuevas figuras a partir de las originales, descríbanlas.

Teselación es un patrón de figuras que cubre un plano cumpliendo básicamente dos condiciones: no quedan huecos entre las figuras y las figuras no se superponen.

En parejas

1. Construyan una teselación con base en traslaciones, usando la técnica de Maurits Cornelis Escher. Sigan los pasos:

Material

- Dos hojas semitransparentes de 12 cm × 12 cm (papel de China, papel cebolla o albanene).

a) Tracen la figura *A* como se indica.

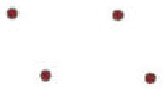
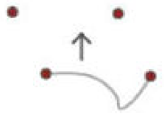
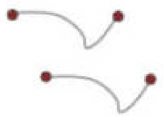


Figura A

b) En los vértices del paralelogramo (figura *A*) que se muestra, tracen una curva que una dos vértices adyacentes.

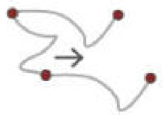


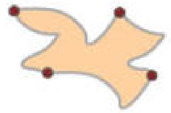
c) Sobre el trazo, coloquen el papel semitransparente. Copien la curva y los cuatro vértices. Trasladen el papel de tal manera que sea posible dibujar la curva en el lado paralelo opuesto.



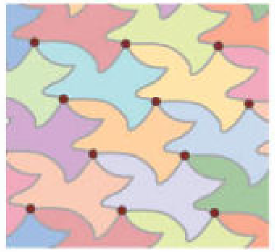
d) Tracen una curva diferente en la que se unan los otros dos vértices adyacentes.

e) Trasladen hacia la izquierda el papel semitransparente y copien la curva como se muestra en la figura. Usen su imaginación, observen la figura y agreguen detalles. Ésta será el mosaico teselante elaborado a partir de traslaciones.





f) Coloquen sobre la figura teselante una hoja de papel semitransparente y cubran el plano trazando varias figuras sin que queden huecos ni se superpongan.



En parejas

1. Construyan una figura teselante a partir de rotaciones. Sigan los pasos:

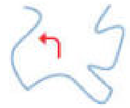
Material

- Dos hojas semitransparentes de 12 cm × 12 cm (papel de China, papel cebolla o albanene)

a) En una hoja de papel cuadriculado seleccionen un cuadrado de dimensiones 3.5 cm × 3.5 cm.

b) Tracen una curva que una dos vértices adyacentes, como se muestra en la figura.

c) Coloquen el papel semitransparente sobre la curva, cópienla y rótenla 90° en movimiento retrógrado. Calquen la curva en la nueva posición.

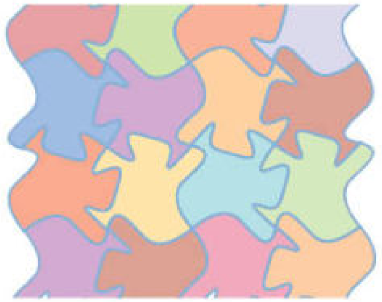


d) Tracen otra curva que una dos vértices adyacentes. Roten 90° en forma retrógrada.

e) Ésta será su figura teselante. Copien la pieza en el centro de un papel semitransparente. Dibujen detalles interiores haciendo uso de su imaginación.

f) Roten la figura 90° alrededor de los puntos de tal manera que puedan replicarla.

g) Llenen una hoja semitransparente a partir de la figura teselante que construyeron, alternen colores de relleno para enfatizar el patrón.



¡A investigar!

Para celebrar las fiestas tradicionales de nuestro país, como el Día de la Independencia, el Día de Muertos o las posadas, entre otras, comúnmente se elaboran decoraciones con papel de China picado que sirven de adorno.

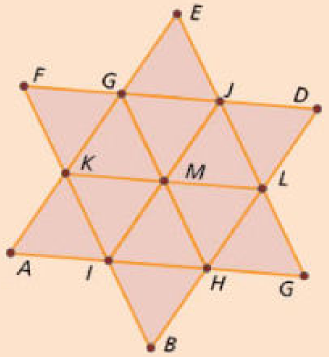
- Investiga la técnica con que los artesanos elaboran estos diseños y menciona qué clase de transformaciones geométricas utilizan para hacer las figuras en el papel de China picado.
- Elabora un diseño en ese tipo de papel en el que se observen distintos tipos de transformaciones geométricas.

Tecnología

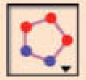
Por medio del programa *Geogebra*, exploraremos la formación de un diseño de una misma figura.

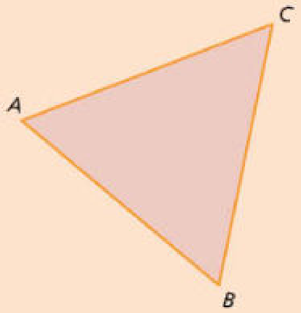
1. Observa la siguiente secuencia.

a) Analiza la siguiente figura que fue construida con *Geogebra*.

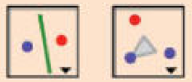


b) En el programa *Geogebra*, utiliza la herramienta *Polígono Regular* y construye un triángulo equilátero.





c) Ahora, a partir del triángulo *ABC*, utiliza las herramientas *Refleja Objeto en recta* y *Rota Objeto en torno a Punto* y construye una figura como la que se muestra en el inciso a. Para ello, reproduce el triángulo *ABC* a través de la rotación y/o la reflexión del mismo.



2. Contesta las preguntas siguientes.

a) ¿Qué tipo de simetría aplicaste al primer triángulo para cubrir la punta superior del centro, la punta superior izquierda y la punta superior derecha? ______

b) Para obtener un triángulo invertido al primero, ¿qué tipo de simetría aplicas? ______

c) ¿Podrías llenar todo el diseño si sólo realizas reflexiones? Describe tu procedimiento. ______

d) Si únicamente haces rotaciones, ¿podrías llenar todo el diseño? Describe tu procedimiento. ______

e) Compara tus respuestas con tu grupo.

Tecnología

Para saber más

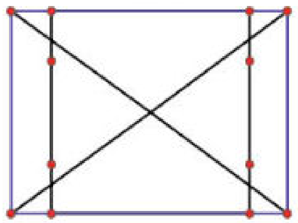
Maurits Cornelis Escher nació en Leeuwarden, Holanda en 1898, y murió el 27 de marzo de 1972. Las obras de Escher han sido trabajos que se reconocen como formas con sentido matemático, inició una corriente artística que se fue enriqueciendo a la luz de ideas artísticas con conceptos matemáticos. Algunas de sus obras se caracterizaban por la repetición de una o dos figuras determinadas, las cuales actuaban simultáneamente como forma y fondo, esto permitía cubrir todo el plano teselando dichas figuras.

- En esta lección has utilizado algunas técnicas de Escher para elaborar este tipo de mosaicos teselantes. Para reafirmar tus conocimientos realiza la siguiente actividad.

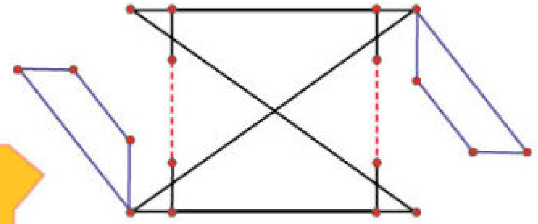
En parejas

1. Reúnanse en parejas y construyan el siguiente diseño.

a) En un cuadrado tracen líneas paralelas a los lados como se muestra en la figura, también tracen las diagonales.



b) Por medio de rotación, coloquen las figuras que se desprenden del cuadrado sobre los lados horizontales.

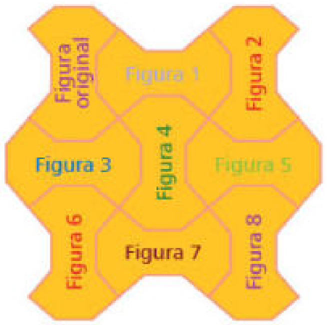


c) La figura que resulta es similar a ésta:

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en la elaboración de la figura y en la teselación del plano para desarrollar la actividad?
2. ¿Comparó con otros equipos sus respuestas?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención en la discusión sobre los procedimientos que utilizaron sus compañeros?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su pareja, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.



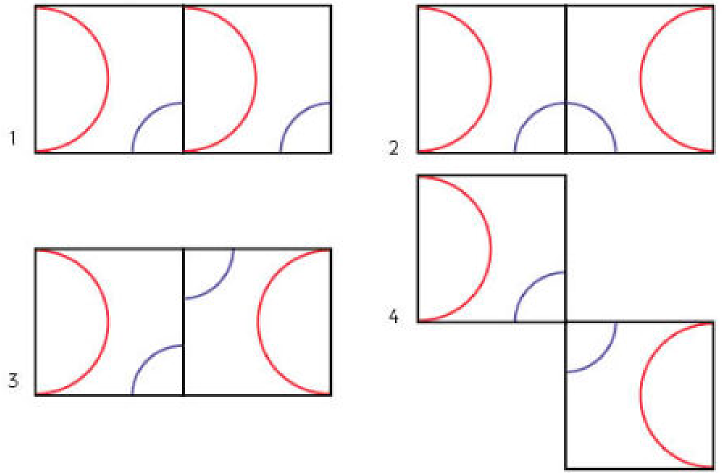
2. Recubran un plano con figuras iguales a la obtenida y contesten las preguntas:

a) Con base en la posición de la figura original, ¿qué movimiento se hizo para obtener la figura 1? ___
¿Y para la figura 3? ___
¿Y para la figura 4? ___

b) Con base en la posición de la figura original, ¿qué movimiento efectuaron para obtener la figura 2? ___
¿Y para la figura 6? ___

c) A partir de la posición de la figura 1, ¿qué movimiento hicieron para obtener la figura 7? ___
¿Y para la figura 5? ___

1. Escribe qué tipo de movimiento se efectuó en el cuadrado de la izquierda para obtener el de la derecha: reflexión, traslación o rotación. En el caso de rotación, indica el ángulo y el punto de rotación.



2. Escribe en la siguiente tabla la transformación (reflexión, rotación o traslación) que genere la imagen de la primera columna en la imagen de la segunda columna.

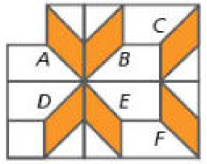


Figura inicial	Figura final	Transformación
A	B	
B	D	
D	C	
C	F	

a) Todas las descripciones coinciden, ¿por qué? ___

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Anticipo el cambio de una figura al aplicarle una reflexión, traslación o rotación.			
Identifico el proceso de construcción de transformaciones.			
Construyo diseños que impliquen efectuar traslaciones, reflexiones o rotaciones.			

¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades?
¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño?
¿Cómo apliqué los razonamientos matemáticos involucrados en esta lección en la resolución de problemas?
Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:

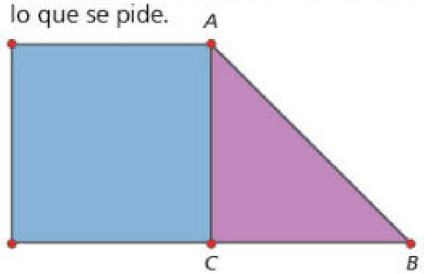
Recuerda que en la medida en que identifiques tus debilidades y fortalezas, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

Áreas de cuadrados que se trazan sobre los lados de un triángulo

Programa

Eje: *Forma, espacio y medida*
Tema: *Medida*
Contenido: *Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.*

1. En la siguiente figura se construyó el triángulo *ABC* y sobre el lado *AC*, se construyó un cuadrado. Reproduce los trazos en una cartulina y haz lo que se pide.



a) ¿Qué relación hay entre la longitud de cada uno de los lados del cuadrado y el lado *AC* del triángulo? ___

b) Traza un cuadrado sobre el lado *CB* del triángulo. Traza una diagonal en cada uno de los cuadrados que tienes. Describe el procedimiento que utilizaste para construir el cuadrado sobre *CB*. ___

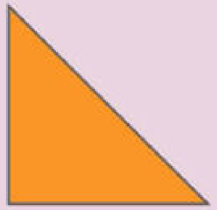
c) Ahora, construye un cuadrado sobre el lado *AB*. Recorta los dos primeros cuadrados construidos. ¿Es posible obtener con ellos la superficie del cuadrado construido sobre *AB*? ¿Por qué crees que sucede esto? ___

d) ¿De qué clase es el triángulo *ABC*? Describe sus propiedades. ___

2. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y escribe alguna relación que hayas observado entre los cuadrados de los lados del triángulo con el que trabajaron. ___

Al margen

Con la ayuda de los triángulos rectángulos se pueden solucionar problemas de la vida cotidiana.
En matemáticas, los triángulos rectángulos y no rectángulos tienen aplicaciones tanto en la vida diaria como en el campo profesional en carreras de ingenierías y arquitectura, entre otras.

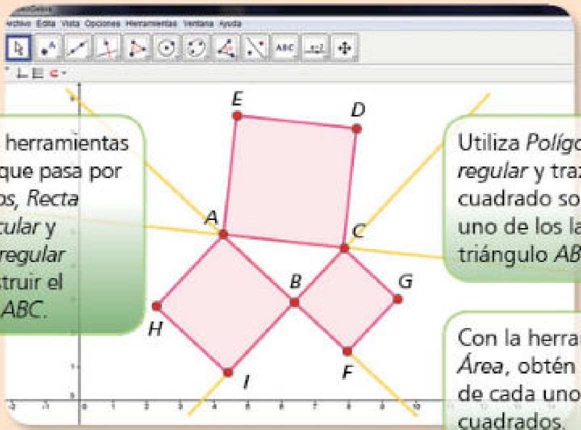


Triángulo rectángulo

¿Qué aplicación de los triángulos rectángulos puedes mencionar?

Tecnología

1. En la siguiente actividad utilizarás el programa *Geogebra* para analizar la relación entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.



Utiliza las herramientas de *Recta* que pasa por *dos puntos*, *Recta perpendicular* y *Polígono regular* para construir el triángulo *ABC*.

Utiliza *Polígono regular* y traza un cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo *ABC*.

Con la herramienta *Área*, obtén el área de cada uno de los cuadrados.

a) ¿Cuál es el área del cuadrado construido sobre el lado *AB*? ¿Y la del cuadrado construido sobre el lado *BC*? ____________

b) ¿Cuál es el área del cuadrado construido sobre el lado *AC*? ____________

c) Describe la relación que existe entre las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los lados del triángulo *ABC*. ____________

d) Manipula cualquiera de los vértices del triángulo *ABC* y describe qué sucede con el triángulo y con los cuadrados. ¿Se mantiene la relación entre las áreas de los cuadrados? ____________

2. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y en caso de que haya errores en las construcciones realizadas, identifiquen las causas.

En equipo

1. Formen equipos de cuatro integrantes. Observen las dos figuras y a partir de la relación entre ellas, contesten las preguntas.

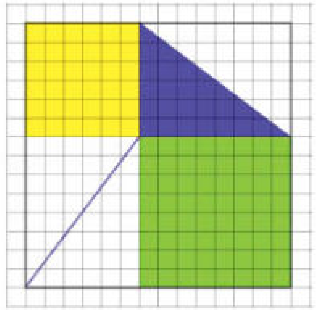


Figura 1

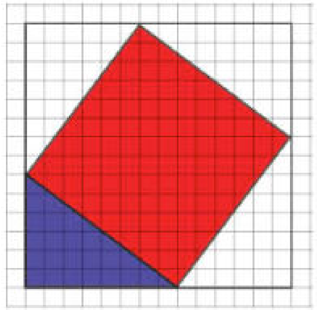


Figura 2

a) Si el lado del cuadrado amarillo, construido sobre uno de los lados del triángulo, es *a*, ¿cuál es el valor de a^2? Justifiquen su respuesta.

____

b) Si el lado del cuadrado verde, construido sobre uno de los lados del triángulo, es *b*, ¿cuál es el valor de b^2? Justifiquen su respuesta.

____

c) Si el lado del cuadrado rojo, construido sobre uno de los lados del triángulo, es *c*, ¿cuál es el valor de c^2? Justifiquen su respuesta.

____

d) Indiquen en cuáles de las siguientes expresiones algebraicas se cumple con lo planteado en las actividades previas.

- $a^2 = c^2 - b^2$
- $a^2 = c^2 + b^2$
- $c^2 = a^2 - b^2$
- $c^2 = a^2 + b^2$
- $b^2 = c^2 + a^2$
- $b^2 = c^2 - a^2$
- $a^2 = b^2 - c^2$
- $a^2 = b^2 + c^2$

2. Comparen sus respuestas con las de los demás equipos y analicen la relación que existe entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo.

Coevaluación

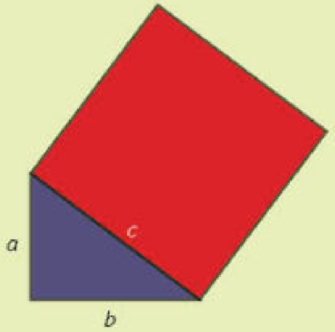
Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas, explicando por qué piensan así:

1. ¿Identificó la relación de los polígonos en cada una de las figuras?
2. ¿Obtuvo los cuadrados de *a*, *b* y *c*; y a partir de ellos estableció una relación?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros?
4. ¿Qué aspectos de su participación deben mejorar?

Para avanzar

En todo triángulo rectángulo el área del cuadrado construido sobre el lado mayor (hipotenusa) es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados menores (catetos).

catetos: *a* y *b*
hipotenusa: *c* $\longrightarrow$ $c^2 = a^2 + b^2$



1. Por lo anterior, se deduce que el área del cuadrado mayor menos el área de un cuadrado menor, da como resultado el área del tercer cuadrado. ¿Qué expresiones algebraicas representan esta relación? ____________

¡A investigar!

Analiza y da respuesta a las siguientes preguntas.

- ¿La relación que se presenta entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo, aplica para cualquier otro tipo de triángulo? ¿Por qué? ______________________________

- ¿Se mantiene la misma relación si en lugar de construir cuadrados se construye cualquier otro polígono regular? Argumenta tu respuesta realizando las construcciones necesarias. ______________________________

Valida tus respuestas revisando el contenido de la siguiente dirección electrónica: http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm (Consulta: 13 de enero de 2017).

Valoración personal

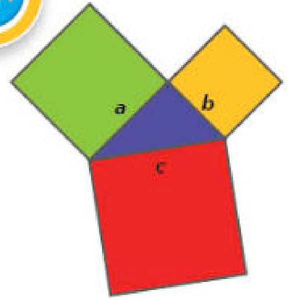
Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Identifico la relación entre los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.			
Analizo las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.			
Identifico, a partir de tres longitudes, la posibilidad de construir un triángulo rectángulo.			
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades? ¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño? ¿Cómo demostré disposición para el estudio de los contenidos de esta lección? Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:			

Recuerda que en la medida en que realices esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

Por tu cuenta

1. Obtén el área de los cuadrados que se indican.



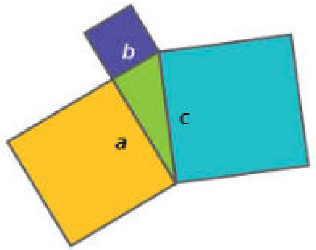
$a = 5.9$ cm

$b = 7.04$ cm

$a^2 =$ ________

$b^2 =$ ________

$c^2 =$ ________



$b = 7.87$ cm

$c = 8.68$ cm

$a^2 =$ ________

$b^2 =$ ________

$c^2 =$ ________

2. Completa la tabla y marca en qué casos es posible, con las tres longitudes, construir un triángulo rectángulo.

a	b	c	a^2	b^2	c^2	¿Se construye un triángulo rectángulo?	
						Sí	No
4		5		9	25	✔	
5	12				169		
6	8	14					

3. Compara tus respuestas con las de otros compañeros y en caso de observar diferencias revisa las actividades de la lección.

Aplicación del Teorema de Pitágoras

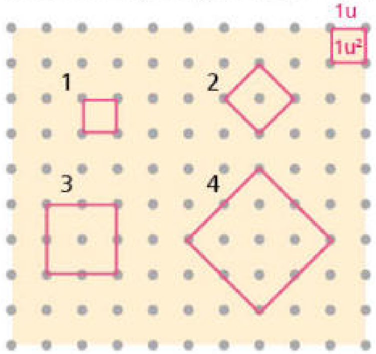
Programa

Eje: *Forma, espacio y medida*
Tema: *Medida*
Contenido: *Explicitación y uso del Teorema de Pitágoras.*

Piensa y comenta

Al explorar las longitudes y áreas de triángulos rectángulos y cuadrados, se puede aplicar el Teorema de Pitágoras; éste se refiere a la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo.

1. Observa los cuadrados dibujados en la siguiente red y contesta las preguntas. Considera la unidad de longitud y área que se indica.

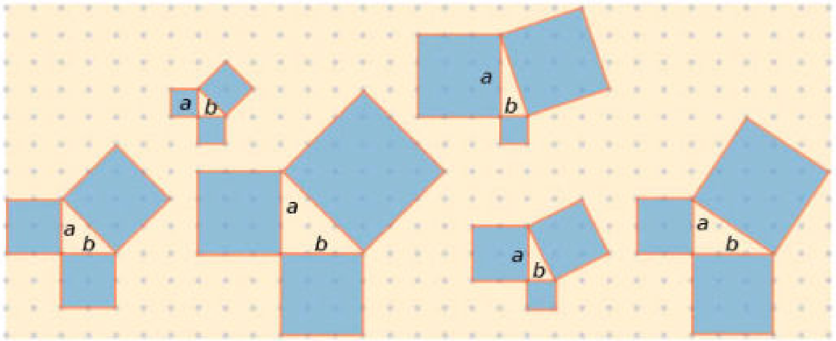


a) ¿Cuál es el área de cada uno de los cuadrados? ______________________________

b) A partir del área de un cuadrado, ¿cómo se obtiene la longitud de su lado? ¿Cuánto miden los lados de los cuadrados 1 y 3? ______________________________

c) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado 2?, ¿y el del cuadrado 4? Si el resultado no es un número entero, exprésalo como la raíz cuadrada de un número entero. ______________________________

2. Analiza las siguientes figuras.



Al margen

En el antiguo Egipto, el río Nilo se desbordaba año tras año, destruyendo los límites de las tierras y propiedades. Como consecuencia, los egipcios tenían que volver a medir sus tierras para establecer los límites que el río había borrado. Para esto utilizaban una herramienta que marcaba ángulos rectos, la cual consistía en una cuerda dividida, por nudos, en 12 segmentos.

Medición de ángulos rectos.

Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 nudos, respectivamente, ¿cuántos nudos mide su hipotenusa?

a) A partir de las figuras anteriores, relaciona cada triángulo con las longitudes de los lados y completa la siguiente tabla.

Longitud de cateto *a*	Longitud de cateto *b*	Área del cuadrado sobre el cateto *a*	Área del cuadrado sobre el cateto *b*	Área del cuadrado sobre la hipotenusa	Longitud de la hipotenusa
1	1	1	1	2	
1	2				
2	2				
1	3				
2	3				
3	3				
3	4				

Catetos son los lados que forman el ángulo recto de cada triángulo.

Hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.

b) ¿Cómo obtienes la longitud de la hipotenusa en cada uno de los triángulos? ______

c) ¿Qué relación observas entre las áreas de los tres cuadrados construidos sobre cada triángulo? ______

d) Traza en tu cuaderno un triángulo rectángulo con longitudes diferentes a las de la tabla, úsalo para verificar la conjetura que elaboraste en el inciso *b*.

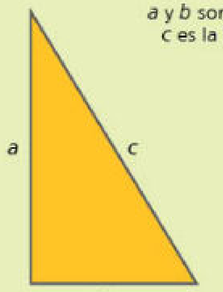
3. Compara tus respuestas con las de otros compañeros y comenta cómo se puede determinar la longitud de un cateto o la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

4. Reúnete con algún compañero y analiza la siguiente información; luego, contesta lo que se pregunta.

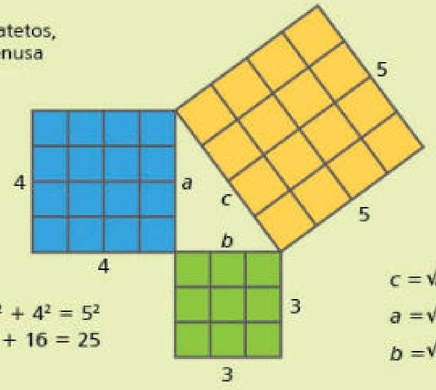
Teorema de Pitágoras

1. En todo triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

a y *b* son los catetos, *c* es la hipotenusa



$a^2 + b^2 = c^2$



$3^2 + 4^2 = 5^2$

$9 + 16 = 25$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación entre las áreas de los cuadrados que se forman con los lados de un triángulo rectángulo? ______

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la medida de uno de los catetos de un triángulo rectángulo? ______

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo? ______

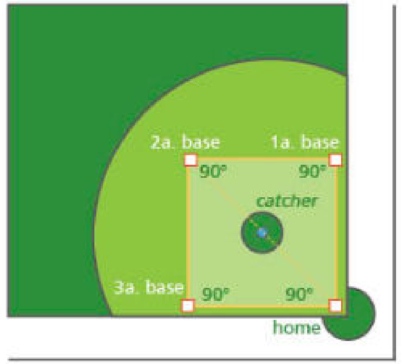
2. Comparen sus respuestas con las de otras parejas de compañeros y con todo el grupo, verifiquen con un triángulo rectángulo de 3, 4 y 5 unidades por lado que las expresiones que escribieron en los incisos *b* y *c*, son correctas.

En equipo

1. Daniel es el *catcher* de un equipo de béisbol. El jugador que está en la primera base intentará robarse la segunda base cuando el *pitcher* lance la pelota a Daniel.

a) Si la distancia de *home* a primera base y de ésta a segunda es de 90 pies (27.43 m), ¿qué distancia debe recorrer la pelota desde *home* hasta la segunda base? ______

b) Si uno de los jugadores está situado justo en medio de la segunda y tercera bases, ¿qué distancia hay entre él y el *catcher*? ______



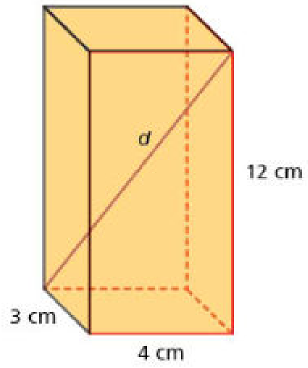
2. Fíjense en el prisma rectangular y calculen la longitud de la diagonal *d*.

a) ¿Qué datos necesitan conocer para obtener la longitud de la diagonal *d*? ______

b) ¿Cuánto mide la diagonal de la base del prisma? ______

c) ¿Qué fórmula deben aplicar para obtener el valor de la diagonal *d*? ¿Cuál es el valor? ______

d) ¿Cuánto mide la diagonal de las caras laterales del prisma? ______



3. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros; en caso de que no coincidan, verifiquen sus procedimientos y cálculos; por ejemplo, para el primer problema, cómo determinaron las distancias desde *home* a primera base y de primera base a segunda base.

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en dar respuesta a las preguntas acerca de la relación entre las áreas de las figuras construidas en los lados de un triángulo rectángulo?
2. ¿Verificó con otros equipos sus respuestas?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de otros compañeros?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su compañero, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

1. El Teorema de Pitágoras describe la relación entre las áreas de los cuadrados trazadas sobre los lados de un triángulo rectángulo. En las siguientes actividades explorarán la relación entre las áreas de otras figuras trazadas sobre los lados de un triángulo rectángulo.

a) En la figura A se trazaron medios círculos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

- Encuentren el área de cada uno.

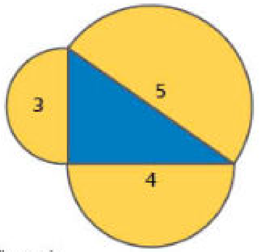


Figura A

- ¿Qué relación hay entre las áreas de los medios círculos? ______

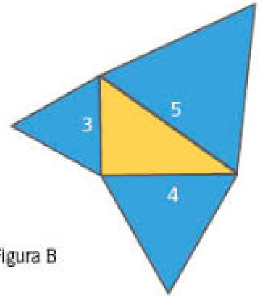


Figura B

b) En la figura B, se trazaron triángulos equiláteros sobre los lados de un triángulo rectángulo.

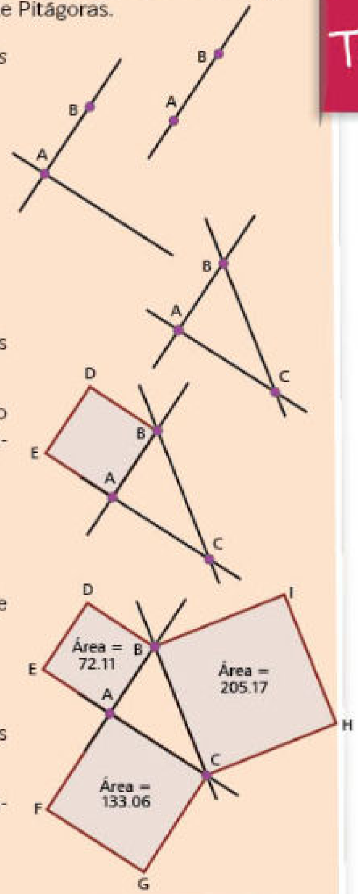
- Encuentren el área de los triángulos equiláteros. ______
- ¿Qué relación hay entre las áreas de los triángulos equiláteros?

c) En su cuaderno tracen hexágonos regulares sobre los lados de un triángulo rectángulo y encuentren la relación entre sus áreas.

2. Comparen sus construcciones y sus respuestas con las de sus compañeros. Luego, escriban en su cuaderno una conclusión sobre las relaciones entre las áreas de las figuras que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Tecnología

Por medio de *Geogebra* manipularás de manera dinámica la relación que se establece entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo, comúnmente conocida como Teorema de Pitágoras.



1. Usa la herramienta *Recta que pasa por dos puntos* y construye una recta.

   Recta que pasa por dos puntos

2. Utiliza *Recta perpendicular* para construir una perpendicular a la recta anterior.

   Recta perpendicular

3. Traza una recta que corte las dos rectas anteriores y que sea oblicua a ambas.
4. Utiliza *Polígono regular* y construye un cuadrado sobre cada uno de los lados que forman el triángulo ABC.

   Polígono regular

5. Cuando termines, obtén el área de cada uno de ellos con *Área*.

   Área

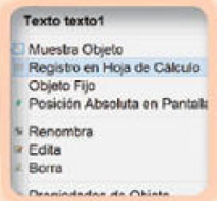
6. Con *Inserta texto* selecciona el área de uno de los cuadrados y oprime *ok*.

   Después, realiza la misma acción en el otro cuadrado construido sobre el otro cateto.

   Inserta texto

7. Con el botón secundario, o derecho del ratón, elige la opción *Registro en Hoja de Cálculo*.

   Considera los valores *Fila Inicial:* 1 y *Límite de Fila:* 1; después, realiza la misma acción para el área del otro cuadrado en la celda B1 de la hoja de cálculo.



8. En la celda C2 anota la fórmula: =A2+A2

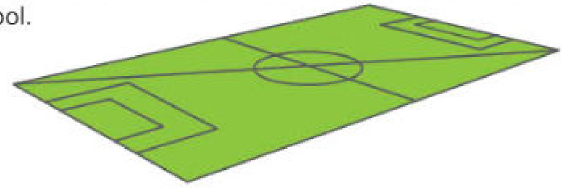
Hoja de Cálculo

	A	B	C
1	...	...	
2	107.27	218.19	=A2+B2

9. Manipula los vértices del triángulo. ¿Qué observas? ______

Compara tus construcciones con las de otros compañeros y comenten si se cumple el Teorema de Pitágoras.

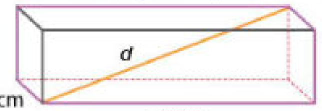
1. Se desea conocer la medida de la diagonal de una cancha de fútbol.



Si las medidas de la cancha son 105 × 67 m, ¿cuánto mide la diagonal de la cancha?

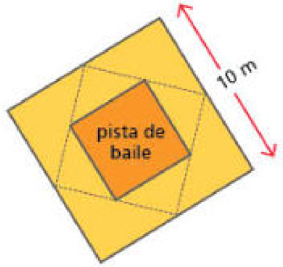
2. Aplica el Teorema de Pitágoras para encontrar lo que se pide en cada uno de los siguientes problemas.

   a) De la siguiente caja encuentra la longitud de la diagonal *d*.



   b) En un salón de fiestas cuadrado se dejó para la pista de baile una superficie, también cuadrada, que será cubierta con madera. La pista de baile se construyó dentro de un cuadrado cuyos vértices son los puntos medios del cuadrado original, como se muestra en la figura.

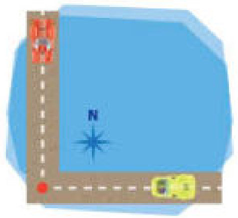
   - ¿Cuántos metros cuadrados de madera se necesitarán para cubrir el piso de la pista de baile? ________
   - ¿Cuál es el perímetro de la pista de baile? ________



   c) Dos automóviles partieron desde el círculo rojo que se observa en el dibujo. Uno de ellos viaja hacia el Norte y el otro hacia el Este. El primer automóvil viaja a 110 km por hora y el segundo a 90 km por hora.

   - Completa la siguiente tabla en la que se muestra tanto la distancia que cada automóvil ha viajado como la distancia entre los dos después de cierto tiempo.

Tiempo (h)	1	2	3	4	5
Distancia del automóvil que viaja al Norte (km)					
Distancia del automóvil que viaja al Este (km)					
Distancia entre los dos automóviles					



   - Si se supone que el automóvil que viaja hacia el Norte lo hace a 60 km por hora y que, después de dos horas, la distancia entre ambos autos es de 150 km, ¿a qué velocidad viaja el automóvil que va hacia el Este? Explica cómo obtuviste la respuesta. ________

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Reconozco en qué consiste el Teorema de Pitágoras.			
Identifico qué tipo de transformación algebraica es necesario realizar para calcular longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.			
Reconozco a qué tipo de problemas se puede aplicar el Teorema de Pitágoras.			

¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades?
¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumí para desarrollar el hábito del pensamiento racional?
Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:

Recuerda que en la medida en que realices esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

Probabilidad de eventos excluyentes y complementarios

Programa

Eje: *Manejo de la información*
Tema: *Nociones de probabilidad*
Contenido: *Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).*

Algunos casos donde se aplica la probabilidad son los sorteos de lotería, la posibilidad de obtener un empleo entre varios aspirantes y la probabilidad de que haya un día soleado o no.

1. Completa la tabla, para ello anota los resultados posibles de lanzar simultáneamente dos dados de seis caras y sumar los puntos que aparezcan en sus caras superiores.

Suma	Eventos posibles	Probabilidad
2		$\frac{1}{36}$
3		
4		
5	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	
6		
7		
8		
9		
10	(4,6) (5,5) (6,4)	
11		
12		$\frac{1}{36}$

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 10? ________
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 2 o 3? ________
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea menor que 5 o mayor que 10? ________
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 5 o 6?, ¿cómo obtuviste la respuesta? ________
   e) Si tienes una probabilidad de $\frac{5}{36}$, ¿qué sumas pudiste haber obtenido? ________
   f) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma menor que 8 o mayor que 7? Justifica tu respuesta. ________
   g) Compara las respuestas en tu grupo. Para el caso de que hayan encontrado resultados equivalentes, reduce los resultados expresados como fracciones a su mínima expresión. ________

Al margen
La palabra "probable" se emplea con frecuencia en el lenguaje cotidiano.
Se usa para expresar con qué grado de certidumbre se piensa que sucederá un evento. Por ejemplo, cuando se dice "es probable que llueva", se debe a que las condiciones climáticas están dadas para ello.
Comenta con tus compañeros alguna situación de tu vida en la que intervenga la probabilidad.

La probabilidad se usa para expresar las condiciones climatológicas.

1. Lean con atención y contesten lo que se te pide.

a) Si se lanza un dado de 6 caras, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 3 o un 7?

P(3) = ______

P(7) = ______

P(3 o 7) = ______

b) Una ruleta está dividida en cuatro sectores como se muestran en la figura de la derecha. ¿cuál es la probabilidad de que la flecha se detenga en el área *A* o *C*?

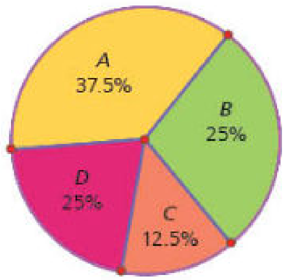
P(*A*) = ______

Probabilidad de que no salga (*A*) = ______

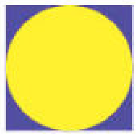
P(*C*) = ______

Probabilidad de que no salga (*C*) = ______

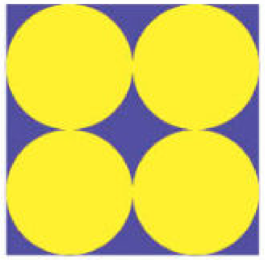
P(*A* o *C*) = ______



2. Escriban la probabilidad de tocar el área del color que se indica si se lanza un dardo en cada tablero. Deben considerar que los cuadrados son iguales y asumir que el dardo siempre queda ensartado en el tablero.



Tablero 1



Tablero 2

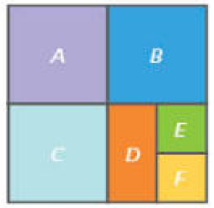
P(amarillo) = ______ P(amarillo) = ______

P(azul) = ______ P(azul) = ______

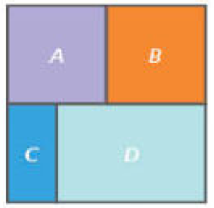
P(amarillo o azul) = ______ P(amarillo o azul) = ______

Si se obtiene mayor puntaje cuando se toca el color amarillo, ¿con cuál tablero conviene jugar? ______ Justifiquen su respuesta.

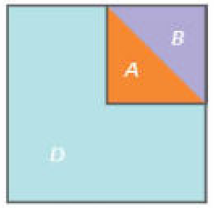
3. Dos jóvenes juegan a lanzar dardos a un tablero como los que se muestran. Escriban las probabilidades que se piden en cada caso, expresen como fracción en su mínima expresión. Asuman que el dardo siempre cae en el tablero.



Tablero 1



Tablero 2



Tablero 3

P(*A*) = ______	P(*C*) = ______	P(*A*) = ______
P(*D*) = ______	P(*A* o *B*) = ______	P(~*A*) = ______
P(*E*) = ______	P(*A* o *C*) = ______	P(*D*) = ______
P(*A* o *C*) = ______	P(*A* o *B* o *D*) = ______	P(~*D*) = ______
P(~*E*) = ______	P(*C* o *D*) = ______	P(*B* o *D*) = ______
		P(*A* o *B* o *D*) = ______

a) ¿Consideran que el evento *B* o *D* es un evento seguro? ______ ¿Por qué? ______

b) ¿Y el evento *A* o *B* o *D*? ______ Expliquen. ______

Evento seguro
es un evento que tiene probabilidad 1.

4. Ramiro tiene 15 tarjetas. Las pintó y escribió un número en cada una, quedaron como las que aquí se muestran; las revuelve y escoge una tarjeta al azar.

1	2	3	4	5
10	15	20	25	30
20	30	40	50	60

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la tarjeta que escoja Ramiro sea verde o roja? ______ Justifiquen su respuesta.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la tarjeta sea roja o de que tenga un número divisible entre 15? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la tarjeta sea azul o mayor que 40?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la tarjeta tenga un número menor que 20 o de que sea roja? Expliquen su respuesta. ______

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en el cálculo de probabilidades de la actividad?
2. ¿Comparó con otros equipos sus respuestas?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención en la discusión acerca de los procedimientos que utilizaron sus compañeros?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su pareja, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

Recuerda que...

Las probabilidades son razones expresadas como fracciones, decimales o porcentajes. Para un experimento con un espacio de muestra M y resultados igualmente probables, la probabilidad del evento A está dada por:

P(*A*) = número de elementos de *A* / (número de elementos de *M*

Por ejemplo, se extrae una canica al azar de un frasco que contiene 5 canicas verdes, 8 azules y 7 rojas.

M = { ooooooooooooooooooooo }

Evento *A* = canica verde

Evento ~*A* = canica no verde

Evento *B* = canica azul

$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

$P(\sim A) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

$P(B) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

Experimento es una actividad cuyos resultados pueden observarse y registrarse.

Espacio muestral es el conjunto que contiene todos los resultados posibles de un experimento.

e) ¿Cuál es la probabilidad de que la tarjeta sea roja o azul? ______

5. Comenten sus respuestas con el grupo y establezcan acuerdos en caso de que encuentren algunas diferencias.

En parejas

En parejas realicen las siguientes actividades.

1. A partir de la información de la tabla, contesten las preguntas:

Ingresos de familias que viven en zona habitacional		
Categorías	Intervalo de ingreso	Número de familias
1	Menor de $ 20 000	60
2	$ 20 000, $ 40 000	100
3	$ 40 000, $ 60 000	160
4	$ 60 000, $ 100 000	140
5	$ 100 000 o más	40
	Total	500

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una familia escogida al azar tenga un ingreso familiar de categoría 2? ______

b) ¿Con un ingreso menor a $ 40 000? ______

c) ¿Con un ingreso familiar de categoría 1 o 5? ______

2. Comparen sus respuestas con las de otros equipos, discutan sus diferencias validando sus respuestas e identifiquen si hay fracciones equivalentes en sus resultados.

¡A investigar!

Investiga en qué consisten los sorteos que se realizan en Pronósticos para la Asistencia Pública.

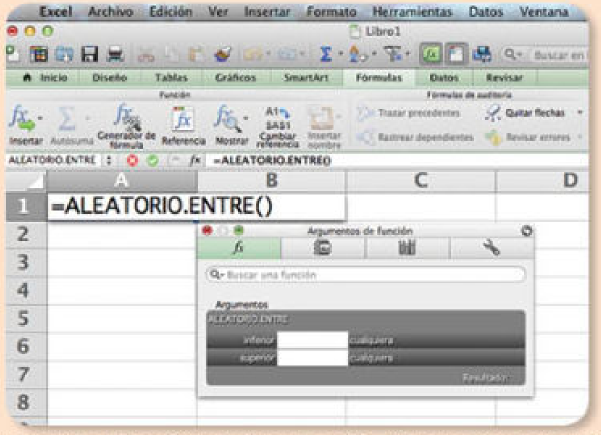
- ¿Qué sorteos realiza? ______
- ¿Cuál es la mecánica de cada sorteo? ______
- ¿En cuál de ellos se tienen más posibilidades de ganar un premio?, ¿por qué? ______
- Selecciona uno de los sorteos y calcula la probabilidad de sacar el premio mayor.

Tecnología

En una hoja de cálculo electrónica explora la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes. Para ello, introduce correctamente las fórmulas que sean requeridas.

1. Se hace girar la siguiente ruleta que contiene números del 1 al 10.

2. En una hoja electrónica de cálculo puedes ingresar una función llamada *Aleatorio. Entre*, la cual te da un número entero aleatorio entre dos que tú escojas como límites inferior y superior, incluyendo los mismos límites. Al oprimir la tecla F9, se activa la función.



a) ¿Qué fórmula debes introducir en la celda A1 para simular la ruleta que se propone? ______

b) Al oprimir 10 veces F9, ¿cuántas veces, según la probabilidad clásica, debería salir un número menor que 4? ______

c) Al hacerlo, sucedió ______, ¿por qué? ______

d) Al oprimir 50 veces F9, ¿cuántas veces, según la probabilidad clásica, debería salir un número menor que 4 y mayor que 8? ______ ¿Por qué? ______

e) Haz el experimento y registra lo sucedido.

3. Con el mismo tipo de función pide a tus compañeros que diseñen sus propios simuladores de dados o ruletas y pregunten entre ustedes sobre la probabilidad de dos eventos mutuamente excluyentes utilizando la hoja de cálculo.

4. Comenta tus respuestas con el grupo y establezcan acuerdos para el caso de que encuentren algunas diferencias.

La probabilidad se calcula dividiendo el número de eventos favorables entre el número de eventos posibles; por ejemplo, la probabilidad de obtener el número uno al tirar un dado es $\frac{1}{6}$.

Cuando dos eventos no pueden ocurrir al mismo tiempo se denominan eventos mutuamente excluyentes.

Al lanzar un dado, los eventos número par y número impar son mutuamente excluyentes puesto que no hay un número que sea par e impar a la vez.

Si dos eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra uno u otro es igual a la suma de las probabilidades de que cada uno ocurra.

Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$

Dos eventos mutuamente excluyentes cuya unión es el espacio muestral son eventos complementarios. Si A es un evento, el complemento de A se escribe $\sim A$ o $\overline{A}$, también es un evento.

1. Anota en tu cuaderno algún juego de azar o de mesa en el que se presenten situaciones que deriven en eventos mutuamente excluyentes.

1. Se pintó de blanco la cara correspondiente a 2 puntos de un dado. En otro dado se pintó de blanco la cara de 5 puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar los dados la suma de los puntos sea 6? ____________

2. Verónica y su hermano están entre 10 hombres y 16 mujeres que se han propuesto para ocupar cargos en la sociedad de alumnos de una escuela secundaria. Si se elegirá al azar a un hombre y a una mujer, ¿cuál es la probabilidad de que sean Verónica o su hermano? ____________

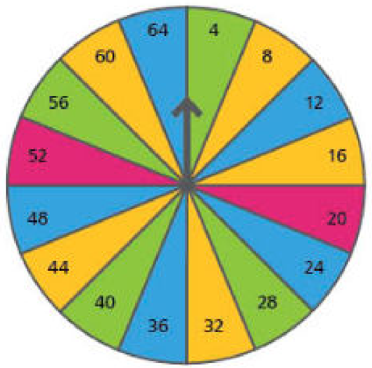
3. Con base en la ruleta de la derecha, contesta las preguntas. Considera que todos los sectores de la ruleta tienen el mismo tamaño.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en color verde o amarillo? ____________

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en un número que termine en 2 o 6? ____________

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en color rosa o azul? ______

   d) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en un número menor que 16 o mayor que 50? ________



   e) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en color rosa o amarillo? ____________

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y en caso de observar diferencias, revisa las actividades de la lección.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Explico la diferencia entre eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes.			
Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios.			
Resuelvo problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes.			
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades? ¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño? ¿Qué actitudes asumí para desarrollar el hábito del pensamiento racional?			

Recuerda que en la medida en que identifiques tus debilidades y fortalezas, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

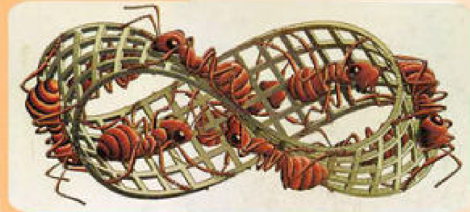
Conexiones

Psicoanálisis y topología

El psicoanálisis es una disciplina que surgió a partir de la necesidad de curar las enfermedades mentales. Además de explorar el inconsciente, también sirve para analizar la historia y la cultura del mundo. Uno de sus más grandes exponentes, Jacques Lacan, se apoyó en una rama de las matemáticas y la geometría, llamada topología, la cual estudia el fenómeno de transformación de ciertos cuerpos geométricos (como la esfera, el toro y la Banda de Moebius). Lacan encontró que el nudo borromeo tiene como característica que al cortarse uno, los otros se separan. Y lo usó como representación de una manera en que se anudan los registros de lo real, simbólico e imaginario (RSI).

Nudo borromeo.

La topología es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades en los espacios topológicos y las funciones continuas. Generalmente conocida como la geometría de la superficie de goma, debido a que en geometría dos objetos son equivalentes cuando podemos transformar el uno en el otro mediante isometrías en topología, dos objetos son equivalentes en sentido más amplio, pues se permite doblar, estirar, encoger, retorcer, etcétera, siempre que los objetos no se rompan ni se separen las uniones iniciales.



Banda de Möbius.

Actividad

1. En grupo, y con el apoyo de su profesor, comenten los siguientes aspectos:
   a) ¿Cuáles son las operaciones geométricas que permiten crear una nueva figura a partir de una previamente dada?
   b) ¿Cuál es la diferencia entre las transformaciones geométricas que conocen y las transformaciones topológicas?
   c) ¿Qué conceptos de transformación geométrica son fundamentales para el estudio de la topología?
2. Después de hacer todos sus comentarios, compartan sus conclusiones acerca de las ventajas de estudiar las distintas transformaciones geométricas (simetría, traslación y rotación) para el estudio de otras disciplinas.

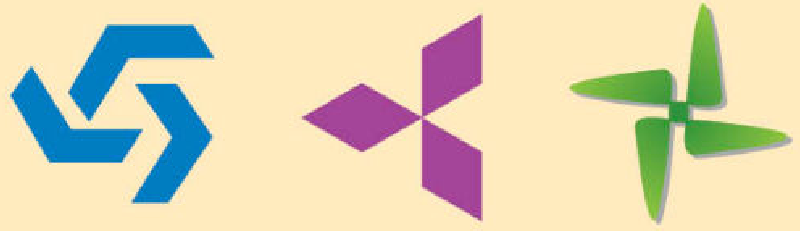
Evaluación tipo PISA

Logos

Un logotipo, más conocido como logo, es un dibujo o imagen que representa a una compañía o institución. Para el diseño de un logotipo se debe buscar que cumpla varias condiciones de las cuales hay tres fundamentales y son las siguientes: memorable, relevante y único. Las transformaciones geométricas son herramientas esenciales para el diseño de logos como los que se muestran enseguida.

1. Describe un proceso de transformación geométrica más corto para construir cada uno de los logos. Emplea lenguaje matemático.

1 2 3



Logo 1: ______________________________

Logo 2: ______________________________

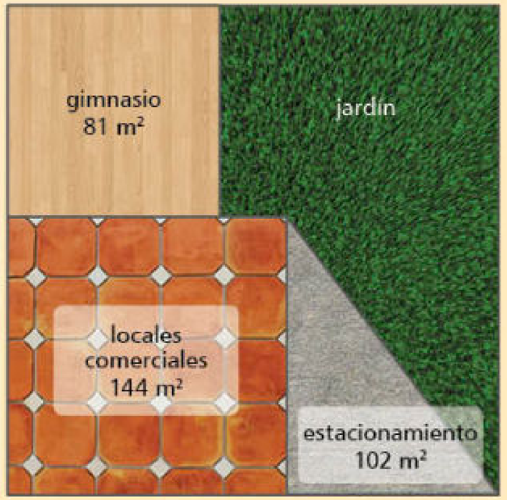
Logo 3: ______________________________

Transformaciones geométricas

1. Contesta falso (F) o verdadero (V) a cada una de las siguientes proposiciones. Justifica tus respuestas.
   a) Una simetría equivale a una traslación. (   )
   b) Dos traslaciones equivalen a una simetría. (   )
   c) Una simetría central es lo mismo que una simetría axial. (   )
   d) Dos figuras simétricas siempre son congruentes. (   )
   e) Una simetría central equivale a una rotación. (   )
   f) Tres simetrías sucesivas respecto a ejes paralelos equivalen a una sola simetría. (   )
   g) Dos simetrías sucesivas respecto a dos ejes perpendiculares equivalen a una rotación de 180°. (   )

Centro comercial

El siguiente plano corresponde a la distribución de espacios de un centro comercial en construcción. Se van a sembrar árboles en el jardín y a colocar una barda alrededor. Para ello, se necesita saber el perímetro y el área del jardín.



1. ¿Cuántos metros cuadrados se destinarán como jardín? Registra tus operaciones.
2. ¿Cuál es el perímetro del jardín? Registra tus operaciones.
3. Escribe las dimensiones del terreno donde se construye el centro comercial. Registra tus operaciones.

El electricista

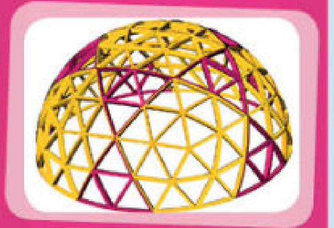
Una escalera de 15 metros de largo está apoyada a 9 metros de la base de una pared como se muestra en el dibujo. Se desea calcular la altura que alcanza la escalera para colocar unas lámparas a una altura de 15 metros sobre el piso.

1. ¿Es posible instalar las lámparas con la altura que alcanza la escalera y la altura de la persona? Anota argumentos matemáticos. ______________________________

BLOQUE

3

Sentido numérico y pensamiento algebraico



Forma, espacio y medida

Manejo de la información

Aprendizajes esperados

Al finalizar este bloque podrás:

- Resolver problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resolver problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Introducción

En este bloque resolverás situaciones como el cálculo del área de un jardín que rodea una alberca rectangular y que implica plantear una ecuación cuadrática conocida como completa. Además, conocerás una herramienta muy útil para resolver cualquier ecuación cuadrática completa.

También descubrirás cómo calcular alturas o profundidades en casos donde no es posible hacer una medición directa. De este modo, calcularás la altura de un edificio, la altura de un árbol o la profundidad de una zanja. De igual forma, aprenderás cómo medir distancias de difícil acceso, como la distancia a la que se encuentra un barco.

Por otra parte, explorarás el tipo de relación matemática que se da en algunos fenómenos físicos como la caída o lanzamiento de un objeto, el llenado de recipientes o en diferentes movimientos, etcétera.

Asimismo, descubrirás cómo construir polígonos semejantes mediante una transformación conocida como homotecia. Por último, estudiarás la forma de calcular la probabilidad de ocurrencia de eventos, cuando no dependan entre sí, en situaciones como lanzamientos de monedas, dados o con la ruleta.

¡Planteamiento del acertijo!

¡Para quienes saben de semejanza!

- ¿Son semejantes los triángulos interno y externo de la figura A, que se muestra a continuación?
- ¿Son semejantes los cuadriláteros externo e interno del marco del cuadro de la figura B que aparece a continuación?
- Proporciona argumentos que validen tus respuestas y compáralos con los de tus compañeros.

PROYECTO 3

Expresiones algebraicas

En este proyecto harás una simulación de una llave que gotea y registrarás los datos del volumen de agua que se pierde en intervalos de cinco segundos. A partir de tus resultados, predecirás qué cantidad de agua se desperdiciaría si la llave goteara durante un mes.

Lo que necesitas:
- Un vaso de unicel
- Un clip
- Un recipiente graduado
- Un reloj con segundero

1. Haz una tabla, como la que se muestra a continuación, para registrar el tiempo y la cantidad de agua que se desperdicia. Escribe para el tiempo valores de 0 a 60 segundos en intervalos de cinco segundos; es decir, 5, 10, 15, etcétera.

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30	35
Cantidad de agua (ml)								

2. Con el clip haz un agujero pequeño en la parte inferior del vaso.

3. Cúbrelo con tu dedo.
4. Llena el vaso con agua.
5. Coloca el vaso sobre el recipiente graduado, cuyo volumen es de un litro, de manera que al descubrir el agujero el agua caiga en su interior.

6. Prepara el cronómetro para iniciar el conteo y cuando estés listo descubre el agujero.
7. Registra en la tabla la cantidad de agua que cae en el recipiente graduado en intervalos de cinco segundos, hasta un tiempo total de 60 segundos.

   a) ¿Qué variables intervienen en esta situación? Describe la relación entre ellas.
   b) Si una llave goteara como el vaso de unicel, ¿cuánta agua se desperdiciaría en dos minutos?, ¿y en tres minutos?, ¿en tres minutos y 15 segundos? Explica cómo hiciste tus predicciones. ¿Usaste tu tabla u otro método para obtener las respuestas?
   c) ¿En cuánto tiempo se llenaría el recipiente graduado?
   d) Además del tiempo, ¿qué otra variable afecta la cantidad de agua que cae en el recipiente graduado?
   e) ¿Qué cantidad de agua se desperdiciaría en un mes? Explica cómo obtuviste la respuesta.
   f) ¿Cuál es la expresión algebraica que te permite modelar la situación que analizaste en este proyecto?
8. Si no puedes responder algunas de las preguntas de este proyecto, no te preocupes; realiza las actividades de las lecciones 18 y 19. Después, retoma este proyecto y trata de responder todas las preguntas. Justifica tus respuestas.

Fórmula general para resolver problemas de ecuaciones cuadráticas

Programa

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema: Patrones y ecuaciones
Contenido: Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

1. Analiza el siguiente problema: Eduardo es 12 años mayor que su hermano. Si el producto de sus edades es 2365, ¿cuántos años tiene Eduardo?

   a) Si simbolizas con x la edad del hermano de Eduardo, ¿cuál es la expresión algebraica que representa la edad de Eduardo? ¿Cuál es la ecuación que representa el problema planteado? Justifica tus respuestas.

   b) ¿Cuál es la solución de la ecuación cuadrática que se obtuvo? ¿Cuál es la edad de Eduardo y la de su hermano? Argumenta tus respuestas.

2. Compara tus respuestas con las de tus compañeros e identifica la relación entre las soluciones de la ecuación y la respuesta del problema.
3. La base de un triángulo mide 10 cm más que su altura y su área es de 28 cm².

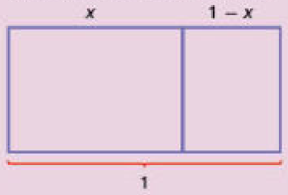
   a) Si la altura del triángulo la representas con x y la base con $x + 10$, ¿cuál es la ecuación que representa el área del triángulo? Justifica tu respuesta.

   b) Si la forma general de una ecuación cuadrática es $ax^2 + bx + c = 0$, indica de esta manera la ecuación que obtuviste en el inciso anterior.

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y elaboren en su cuaderno una conclusión.
5. En la forma general $ax^2 + bx + c = 0$ (donde $a \neq 0$), a, b y c son los coeficientes de la ecuación cuadrática. Los términos de la ecuación se identifican de la siguiente manera:

ax^2	bx	c
Término cuadrático o de segundo grado	Término lineal o de primer grado	Término independiente

Al margen
Si un rectángulo de dimensiones a y b tiene la proporción áurea entre sus lados, se debe cumplir que:



La proporción del lado mayor (de longitud 1) al lado mayor del rectángulo mediano (de longitud x) es igual a la proporción de este último al lado del rectángulo más pequeño (de longitud $1 - x$).

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

lo cual da: $x^2 + x - 1 = 0$
por tanto,

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$
$$x_2 = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}$$
$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

entonces, la razón áurea es: = 1.6180339887498948482… Traza algunos rectángulos con razón áurea.

a) En cada una de las siguientes ecuaciones indica los valores de *a*, *b* y *c*.

Ecuación	*a*	*b*	*c*
$2x^2 + 9x + 12 = 0$			12
$3x^2 - 5x + 2 = 0$		−5	
$7x^2 + 3x = 0$			
$36x - x^2 = 62$			
$x^2 - 6x - 27 = 0$	1		

b) ¿Cuáles son los valores de *a*, *b* y *c* de la ecuación que planteaste en el inciso *b* de la actividad 3? ¿Cuánto miden la base y la altura del triángulo? Argumenta tus respuestas. ______________________

6. Compara con tus compañeros los valores obtenidos en la tabla, así como las longitudes de la base y la altura del triángulo, y comparte con tu grupo las estrategias empleadas.

1. Reúnanse en equipos de cuatro integrantes y analicen la información que se presenta. A partir de ella, resuelvan los problemas que se plantean. Uno de los métodos para resolver ecuaciones cuadráticas es mediante la aplicación de la *fórmula general*:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se identifican en la ecuación cuadrática los valores de *a*, *b* y *c*, y se sustituyen en la fórmula.

2. Aplicando la *fórmula general*, resuelvan los siguientes problemas:

a) Un terreno rectangular mide 3 m más de largo que de ancho y su área es de 130 m². ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

b) La suma de dos números es 5 y su producto es −84. Hallen dichos números.

c) Dentro de 11 años la edad de Pedro tendrá la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Cuál es la edad de Pedro?

d) Para cercar un terreno rectangular de 750 m² se han utilizado 110 m de malla, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

3. Comparen sus respuestas con las de los demás equipos y analicen si las soluciones que obtuvieron para los problemas fueron las correctas. Para el caso de que observen diferencias, compárelas con las soluciones de la ecuación. Asimismo, analicen el significado del símbolo "±" de la fórmula general.

4. Al resolver una ecuación cuadrática, aplicando la fórmula general, es importante tener en cuenta el discriminante ($b^2 - 4ac$); éste es una parte de la fórmula que permite determinar el número de soluciones de la ecuación (dos soluciones, una solución o ninguna, en los números reales).

a) Calculen el valor numérico del discriminante ($b^2 - 4ac$), así como las soluciones de cada ecuación. A partir de ello, contesten lo que se pide.

Ecuación	Valor del discriminante $b^2 - 4ac$	Soluciones
$3x^2 + 16x + 5 = 0$		x_1 = ____ x_2 = ____
$4x^2 + 4x + 1 = 0$		x_1 = ____ x_2 = ____
$x^2 + 2x + 5 = 0$		x_1 = ____ x_2 = ____
$5x^2 + 8x - 3 = 0$		x_1 = ____ x_2 = ____
$x^2 - 3x - 4 = 0$		x_1 = ____ x_2 = ____
$x^2 - 6x + 9 = 0$		x_1 = ____ x_2 = ____

b) ¿En qué ecuaciones el valor del discriminante fue mayor que cero? ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? ______________________

c) ¿En qué ecuaciones el valor del discriminante fue igual que cero? ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? ______________________

d) ¿En qué ecuaciones el valor del discriminante fue menor que cero? ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? ______________________

5. Analicen los valores obtenidos en la tabla, así como cada una de las respuestas y validen en qué casos las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones, una solución o ninguna solución. ______________________

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas, explicando por qué piensan así:

1. ¿Identificó los términos de una ecuación cuadrática y los coeficientes de cada uno de ellos?
2. ¿Resolvió los problemas utilizando la fórmula general?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros?
4. ¿Qué aspectos de su participación deben mejorar?

6. Aplicando la fórmula general, resuelvan las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $4x^2 - 9 = 0$

c) $3x^2 + 5x + 4 = 0$

d) $x^2 - 6x = 0$

e) $3x^2 + 17x + 20 = 0$

f) $x^2 - 7x = -10$

7. Comparen las soluciones que obtuvieron con las de los demás equipos y apliquen el valor del discriminante para validarlas.

¡A investigar!

Busca en algún libro de texto, o en internet, algunos problemas que impliquen el planteamiento de ecuaciones cuadráticas y resuélvelos utilizando la fórmula general. Luego, plantéalos a tus compañeros para que también los resuelvan. Finalmente, comparen sus respuestas.

- ¿Qué ventajas o desventajas tiene aplicar la fórmula general para resolver las ecuaciones cuadráticas en lugar de resolverlas por factorización? ____________

Compara tu respuesta con la de otros compañeros y juntos escriban, en su cuaderno, una conclusión.

Para aprender

Cualquier ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se puede resolver mediante la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Primero se iguala la ecuación a cero y se ordenan sus términos de mayor a menor grado, con el fin de identificar claramente los valores de a, b y c que serán sustituidos en ella.

En la fórmula general, a la parte dentro del radical: $(b^2 - 4ac)$, se le llama discriminante.

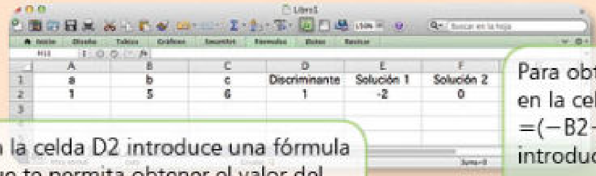
Si $b^2 - 4ac > 0$ La ecuación cuadrática tiene dos raíces o soluciones	Si $b^2 - 4ac = 0$ La ecuación cuadrática tiene una raíz o solución	Si $b^2 - 4ac < 0$ La ecuación cuadrática no tiene solución
Ejemplo: $2x^2 + 4x - 30 = 0$	Ejemplo: $x^2 + 8x + 16 = 0$	Ejemplo: $3x^2 - x + 2 = 0$
$(4)^2 - 4(2)(-30) = 256$ $256 > 0$	$(8)^2 - 4(1)(16) = 0$ $0 = 0$	$(-1)^2 - 4(3)(2) = -23$ $-23 < 0$
Soluciones: $x_1 = 3$ $x_2 = -5$	Solución: $x_1 = -4$	No tiene solución real

- ¿Por qué se dice que cuando el discriminante es menor que cero, la ecuación no tiene solución dentro de los números reales? Comenta tu respuesta con tu profesor y con tus compañeros.

Tecnología

1. Utiliza la hoja electrónica de cálculo para determinar si una ecuación cuadrática tiene dos soluciones, una solución o si no tiene solución dentro de los números reales. Posteriormente, obtendrás las soluciones de la ecuación.

Dada la ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$, se introducen en las celdas A2, B2 y C2 los valores de a, b y c, respectivamente.



En la celda D2 introduce una fórmula que te permita obtener el valor del *discriminante* de la *fórmula general*.

Para obtener una de las soluciones de la ecuación, en la celda E2 se introdujo la fórmula =(−B2−RAIZ(D2))/(2*A2). ¿Qué fórmula debes introducir en F2 para obtener la otra solución? ____________

2. Utiliza la hoja de cálculo para evaluar y resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas:

- $4x^2 - 13x + 3 = 0$
- $x^2 - 5x + 7 = 0$
- $4x^2 + 12x + 9 = 0$
- $5x^2 + 3x + 2 = 0$

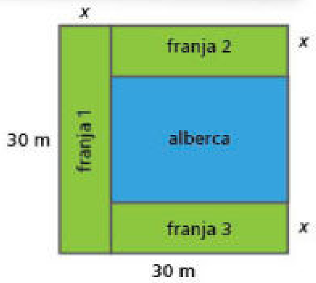
Introduce diferentes valores para a, b y c de manera que obtengas el valor del discriminante y las soluciones de la ecuación.

¿En qué ecuaciones obtuviste dos soluciones, en cuáles una solución única y en cuáles ninguna solución? ____________

3. Compara y valida tus respuestas con tus demás compañeros.

Punto de partida

1. La siguiente figura representa un terreno cuadrado dentro del cual está una alberca rodeada por jardín en tres de sus lados. El terreno mide 30 m de lado y el ancho de las franjas de jardín debe medir lo mismo y ocupar en total un área de 400 m².



a) Escribe una expresión algebraica que represente el área de la franja 1 del jardín. ____________

b) Ahora, anota una expresión algebraica que represente el área de la franja 2 del jardín. ____________

c) ¿Cuál es la suma de las tres áreas que representan el jardín? ____________

d) ¿Cuál es el área que ocupa la alberca? ____________

e) Representa mediante una expresión algebraica la suma del área de las franjas que forman el jardín. Reduce los términos semejantes.

____

f) Plantea y resuelve, aplicando la fórmula general, la ecuación cuadrática que representa el problema. ____________________

g) ¿Las dos soluciones son válidas para este problema? Argumenta tu respuesta. ____________________

h) ¿Cuál debe ser la medida del ancho de cada franja de jardín? ¿Cuál es la medida de las dimensiones de la alberca? ____________________

2. Calcula las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 75 m, sabiendo que es semejante a otro rectángulo cuyos lados miden 36 m y 48 m, respectivamente.

3. Al dejar caer una pelota desde lo más alto de un edificio, la altura *a* en la que se encuentra la pelota en el momento *t* se puede obtener aplicando la siguiente ecuación a la caída libre: $a = -4t^2 + 72$, donde *a* se mide en metros y *t* en segundos. ¿Cuánto tiempo transcurre desde que se deja caer la pelota hasta que esta se encuentra a 36 metros de altura?

____

4. Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medidas en centímetros tres números pares consecutivos. Halla los valores de dichos lados.

5. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $8x + 5 = 36x^2$

c) $6x^2 = x + 222$

d) $x^2 + 11x + 24 = 0$

e) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

6. Compara con tus compañeros tanto las soluciones de los problemas como de las ecuaciones e identifiquen las dificultades a las que se enfrentaron para encontrar una solución común.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Identifico los términos de una ecuación cuadrática.			
Utilizo el discriminante de la fórmula general para determinar el número de soluciones de una ecuación.			
Aplico la fórmula general para resolver problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas.			
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades? ¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño? ¿Cómo demostré disposición para el estudio de los contenidos de esta lección? Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:			

Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

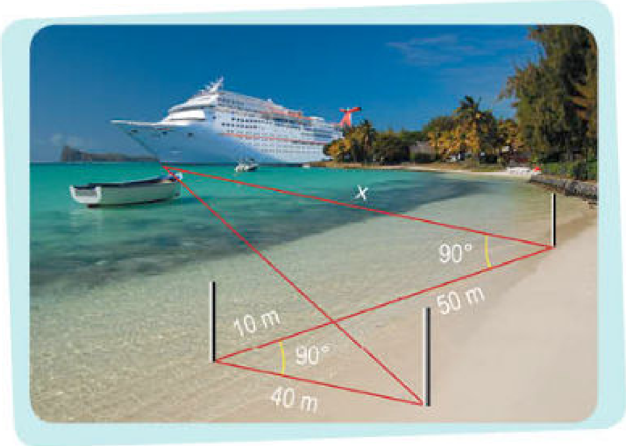
Uso de la semejanza y congruencia

Programa

Eje: *Forma, espacio y medida*
Tema: *Figuras y cuerpos*
Contenido: *Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.*

Cuando se desea obtener la altura de un árbol, un edificio o algún otro objeto, que no es posible hacerlo a través de la medición directa, se puede recurrir a mediciones indirectas. También podemos hacer este tipo de aplicaciones cuando se desea obtener alguna distancia a la cual no se puede acceder fácilmente.

1. Para calcular la distancia desde la playa en la que se encuentra varado un crucero turístico, se tienen los siguientes trazos y medidas.

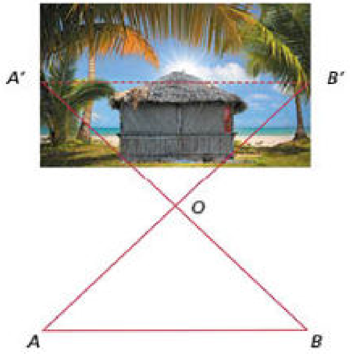


a) ¿Cuál es la distancia que representa *x*? ____________________

2. Compara tu respuesta con las de otros compañeros y comenta cómo fue que calcularon la distancia que existe entre el crucero y la playa. Luego, responde. ¿Los dos triángulos trazados son semejantes? ¿Por qué?

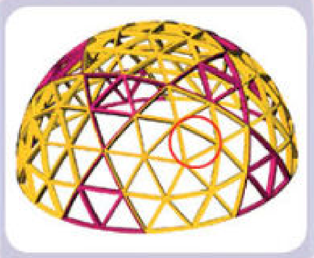
____

1. Para hallar la distancia que hay entre dos puntos *A* y *B* en medio de los cuales se encuentra un obstáculo que impide observar uno desde la posición del otro, nos situamos en un punto *O*, desde el cual se observan ambos puntos.



Al margen

Los domos geodésicos son poliedros generalmente basados en el icosaedro o en el dodecaedro.
Las caras de un domo geodésico son triángulos congruentes. Todos los vértices deben coincidir con la superficie de una esfera o un elipsoide. El número de veces que las caras del icosaedro o dodecaedro son subdivididos en triángulos más pequeños se conoce como la frecuencia del domo geodésico.

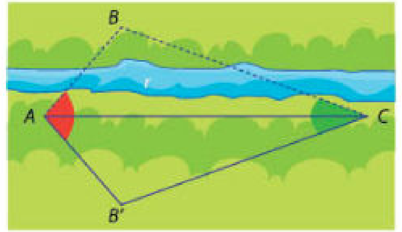


Semiesfera geodésica de frecuencia 4 basada en el icosaedro.

¿Qué tipo de triángulos forman el domo?
¿Un hexágono regular puede estar conformado por seis triángulos equiláteros congruentes?

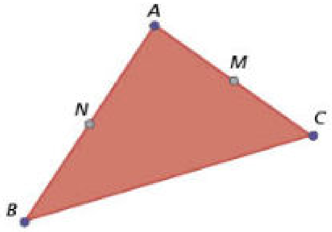
a) ¿Por qué la distancia de A' a B' es igual a la distancia de A a B? Justifiquen su respuesta. ______

2. Para hallar la distancia de un punto A a otro B inaccesible, se toma otro punto de referencia C, se mide el segmento AB' de forma que coincidan los ángulos $B'AC$ y BAC.



a) ¿Por qué la distancia AB' es igual a la distancia AB? Justifiquen su respuesta. ______

3. En el triángulo ABC, M y N son puntos medios de los lados AC y AB, respectivamente.



a) ¿Cuál es el cociente de AM entre MC? ______

b) ¿Cuál es el de AN entre NB? ______

c) ¿Qué posición guarda la recta que pasa por los puntos M y N con respecto al lado BC? ______

d) Ahora, localicen el punto medio del lado BC y denótenlo como L. ¿Qué tipo de cuadrilátero es $LCMN$? ______

e) Si consideran el triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo dado, ¿cómo son el triángulo dado y el formado con los puntos medios? ______

f) Escriban las características que comparten ambos triángulos. ______

4. En plenaria y con la orientación de su profesor, comparen sus respuestas y argumentos; luego discutan lo siguiente: ¿los criterios de congruencia de triángulos nos dicen que no es necesario verificar la congruencia de los seis pares de elementos (tres pares de lados y tres pares de ángulos)?, ¿desde qué condiciones podemos verificar la congruencia de tres pares de elementos?, ¿qué criterios emplearon para justificar sus respuestas en los problemas 1 y 2? En el caso del tercer problema, ¿se puede concluir que $MN = LC = \frac{1}{2}BC$? ______

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en dar argumentos válidos a las respuestas de las distintas preguntas de los problemas?
2. ¿Verificó con otros equipos sus respuestas y procedimientos?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de otros compañeros?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su compañero, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

Para avanzar

1. Reúnete con algún compañero y analicen la siguiente información; luego, respondan lo que se pregunta.

a) La congruencia de triángulos estudia los casos en que dos o más triángulos presentan ángulos y lados de igual medida o congruentes.

b) La semejanza de triángulos estudia los casos en que dos o más triángulos tienen los ángulos homólogos congruentes y sus lados proporcionales.

- ¿Cuáles son las condiciones mínimas que deben cumplir dos triángulos para que sean congruentes? Escríbanlas. ______
- ¿Qué condiciones deben cumplir dos triángulos para tener la certeza de que son semejantes? ______

¡A investigar!

Investiga en algún libro, o en internet, lo siguiente:

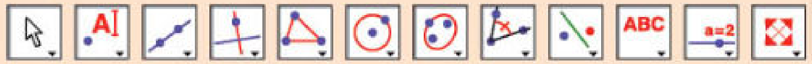
- ¿Son semejantes todos los triángulos equiláteros? ¿Por qué? ______
- ¿Son semejantes todos los triángulos rectángulos isósceles? Explica. ______
- Comprueba que si dos triángulos son semejantes, la razón de sus perímetros coincide con la razón de semejanza. ______
- ¿Qué relación existe entre la razón de semejanza y la razón de sus áreas? ______

Presenta los resultados de tu investigación. Argumenta tus respuestas. Por ejemplo, si la razón de semejanza entre dos figuras es $\frac{1}{3}$, demuestra que la razón de sus áreas es $\frac{1}{9}$.

Tecnología

Construcción de un triángulo y una ampliación del mismo

1. Haz doble clic en el icono de *Geogebra* que tienes en el escritorio. Una vez que se ejecute el programa, en la parte superior aparecerá un menú como el siguiente.

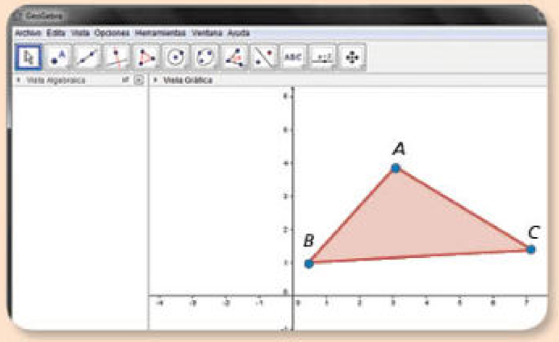


2. Lo primero que harás es introducir la razón de semejanza igual a 3. Para ello, sobre el cuadro de entrada (parte inferior), haz clic y teclea $k=3$. Inmediatamente aparecerá el valor de k en la ventana algebraica almacenado en la carpeta: objetos libres (compruébalo).

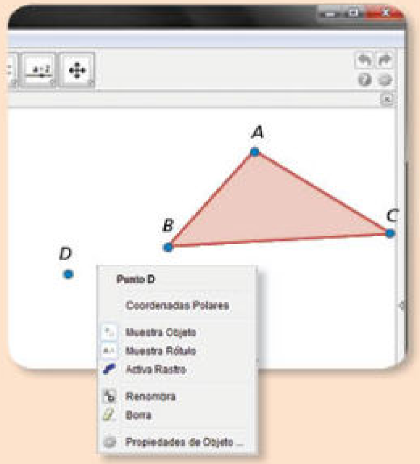
Tecnología

3. Haz clic sobre el triángulo del botón y elige la opción *Polígono* del menú que sale.

4. Haz clic sobre la ventana gráfica y traza un triángulo acutángulo, como el que ves en la figura.

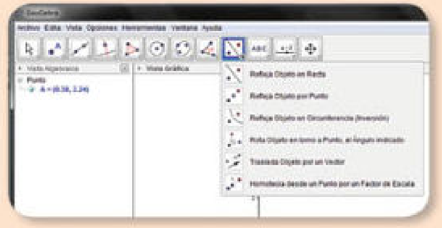


5. Ahora, dibuja un punto al que llamarás *O*. Para ello, haz clic sobre el segundo botón . Luego, haz clic sobre la ventana gráfica, a la izquierda del triángulo. Aparecerá un cuarto punto que el programa ha llamado *Punto D*. Vas a cambiarle de nombre. Pulsa sobre la letra *D* con el botón derecho del ratón y aparecerá un menú contextual como el que ves aquí.



6. Selecciona la opción *Renombra*, y cambia el nombre del punto por el de *O*.

7. Haz clic sobre el noveno botón y selecciona la última opción: .



Lección 15

Tecnología

8. A continuación haz clic sobre el triángulo que has trazado, después haz clic sobre el *Punto O* y después el programa te pide un número, escribe *k*, haz clic en ok y contesta:

a) ¿Qué ha ocurrido? ____________________

____

b) Haz clic sobre el primer botón, *Flecha*. Selecciona el punto *O* y con el botón izquierdo del ratón apretado desplaza dicho punto. ¿Qué ocurre? ____________________

c) Ahora, haz clic sobre el triángulo y arrástralo por la ventana gráfica. ¿Qué ocurre? ____________________

d) Haz clic sobre el vértice *A* del triángulo y muévelo hasta conseguir:

- Primero: Un triángulo rectángulo.
- Segundo: Un triángulo isósceles.
- Tercero: Un triángulo obtusángulo.

¿Qué ocurre en todos estos casos con el otro triángulo? ____________________

____

e) Haz doble clic sobre $k = 3$ que se encuentra en la ventana algebraica, esto te permite cambiar el valor de *k*. Introduce primero el valor $k = 2$. ¿Qué ocurre? ____________________

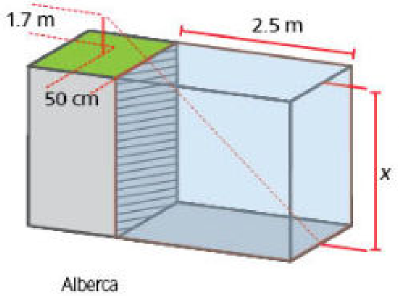
f) Cambia *k* por $k = \frac{1}{2}$. ¿Qué ocurre? ____________________

9. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Comenten lo que experimentaron y escriban una conclusión al respecto. ____________________

____

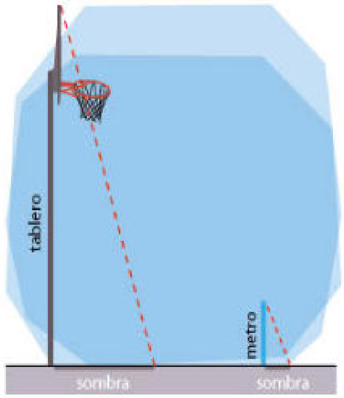
1. Resuelve los siguientes problemas. Al terminar, pide ayuda a tu profesor para que juntos organicen con todo el grupo una puesta en común de las respuestas y procedimientos de resolución.

a) Se desea medir la profundidad de una alberca; para ello, la persona responsable se sitúa a un lado de la piscina en una posición de tal forma que su línea visual coincide con el borde y la línea de fondo de la piscina. Los datos los incluye la figura.



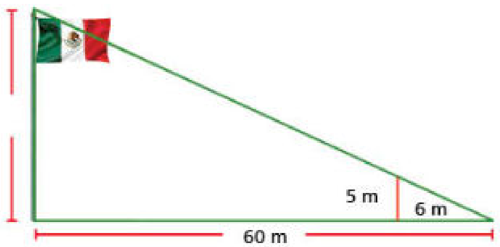
- ¿Qué profundidad tiene la alberca de la izquierda? ______________

b) Diego y sus compañeros usaron la sombra para estimar la altura de un tablero de básquetbol que hay en su escuela. Enseguida se muestran las medidas que tomaron. Úsenlas para encontrar la distancia desde el piso hasta la parte más alta del tablero.

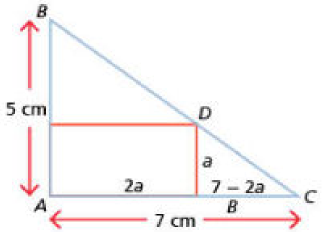


Longitud del metro: 1 m.
Longitud de la sombra del tablero: 1.5 m.
Longitud de la sombra del metro: 0.5 m.

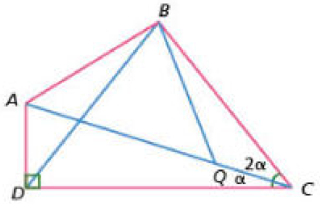
c) ¿Cuál es la altura del asta bandera? ______________



d) En un triángulo rectángulo se inscribe un rectángulo cuya base es dos veces su altura. Los catetos del triángulo miden 5 cm y 7 cm, respectivamente. Calcula las dimensiones del rectángulo.



e) En la figura de la derecha, los triángulos *ABD* y *QBC* son congruentes. Entonces la medida del ángulo *BAC* es: ______________



f) ¿Pudiste resolver todos los problemas? ¿Aplicaste los criterios de semejanza y congruencia de triángulos? ¿Cuál fue la igualdad de razones que estableciste para resolver el primer problema? Pide ayuda a tu profesor y, con todo el grupo, realicen una puesta en común de sus procedimientos y resultados.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Reconozco y aplico los criterios de congruencia en la resolución de problemas			
Reconozco y aplico los criterios de semejanza en la resolución de problemas.			

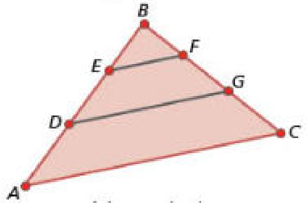
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades?
¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumí para desarrollar el hábito del pensamiento racional?
Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:

Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

El Teorema de Tales de Mileto

Una aplicación del Teorema de Tales se presenta cuando se desea dividir un segmento en partes iguales o proporcionales, ya sea en las construcciones con regla y compás o cuando se utiliza algún programa computacional de geometría.

1. Analiza la figura y contesta las siguientes preguntas:



a) ¿Cuántos triángulos distintos se forman, considerando los segmentos *AB, BC, AC, DB, BG, DG, EB, FB, EF*? ______________

b) Considera que los segmentos *EF*, *DG* y *AC* son paralelos. ¿Cuántos de los triángulos que se forman son semejantes entre sí? ______________

c) ¿Según qué criterios de semejanza? ______________

d) Plantea las proporciones que se establecen entre los lados de cada pareja de triángulos semejantes. ______________

e) ¿Podríamos afirmar que la expresión que se muestra enseguida es verdadera?, ¿por qué? ______________

$$\frac{ED}{DA} = \frac{FG}{GC}$$

f) ¿Y la que se observa después? ¿Por qué? ______________

$$\frac{BE}{EA} = \frac{BF}{FC}$$

g) ¿Qué podrías afirmar o concluir de la proporcionalidad de los segmentos que se forman entre rectas paralelas que se cortan por dos rectas transversales? ______________

2. Comenta con tus compañeros tus respuestas, ¿en qué coinciden y en qué difieren?

3. A continuación, se muestra el procedimiento para dividir un segmento en cinco partes iguales, tiene como referencia los trazos geométricos en los que se va a dividir un segmento en cinco partes iguales; con una regla y compás, en tu cuaderno reproduce cada uno. Después, contesta ahí mismo las preguntas.

Programa

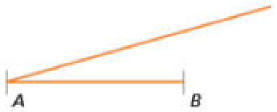
Eje: *Forma, espacio y medida*
Tema: *Figuras y cuerpos*
Contenido: *Resolución de problemas geométricos mediante el Teorema de Tales de Mileto.*

Al margen
Se considera a Tales de Mileto el iniciador de la filosofía occidental. Él fundó la escuela de Mileto, se dedicó a las matemáticas y creó algunos teoremas. Como astrónomo, predijo un eclipse de Sol que ocurrió en 585 a.n.e. Asimismo, debido a los aportes teóricos que hizo a diferentes ciencias, fue incluido entre los siete sabios de Grecia. Investiga: ¿en qué consiste el Teorema de Tales de Mileto? ¿Por qué es útil dicho teorema?

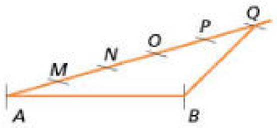
Recta transversal es la que corta a dos o más rectas.

- Traza el segmento *AB*.

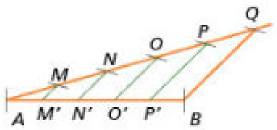
- Traza una semirrecta de origen en el punto extremo *A* del segmento y ángulo menor a 90°.



- Con radio de cualquier medida marca, mediante arcos, cinco unidades iguales sobre la semirrecta. Une el punto *Q* correspondiente a la intersección del último de los arcos y la semirrecta, con el punto extremo *B* del segmento.



- Traza rectas paralelas a *QB* por los puntos *M*, *N*, *O* y *P*. Los puntos *M'*, *N'*, *O'* y *P'* obtenidos en el segmento *AB*, dividen al segmento *AB* en cinco partes iguales.



a) ¿Cómo comprobarías que cada una de las partes en que dividiste el segmento *AB* son iguales? ______

b) ¿Consideras que este procedimiento te puede ser útil para dividir un segmento en cualquier número de partes iguales?, ¿por qué? ______

c) En el trazo obtenido, ¿se forman triángulos semejantes? ______

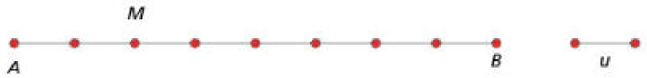
¿Cuáles? ______

d) ¿En qué proporción están los segmentos *AM* y *AN* con respecto a *AM'* y *AN'*? ______

e) ¿Cómo utilizarías el procedimiento para dividir un segmento en dos partes, de manera que una de ellas sea la tercera parte de la otra? Argumenta tu respuesta. ______

4. Compara tus respuestas y tus trazos con los de otros compañeros.

1. Consideren el segmento *AB* que se muestra a continuación, en el cual se utilizó el procedimiento anterior para dividirlo.



a) ¿En cuántas partes está dividido el segmento *AB*? ______

b) ¿En cuántos segmentos divide el punto *M* al segmento *AB*?, ¿cuáles son? ______

c) Si *u* representa cada parte en que se dividió el segmento *AB*, ¿cuál es la longitud de *AM*?, ¿y la de *MB*? ______

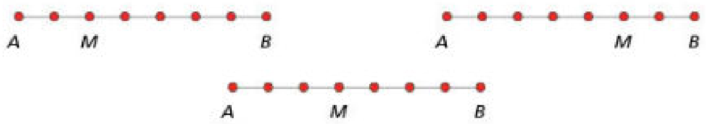
d) ¿Qué relación hay entre la longitud del segmento *AB* y la suma de las longitudes de los segmentos *AM* y *MB*? Escríbanla. ______

e) ¿Cuál es la razón del segmento AM respecto al segmento *MB*? ______

f) Si un segmento *PQ* se divide en dos partes *PN* y *NQ* con una razón de 4:7, y si *PN* mide 8 cm, ¿cuál es la longitud del segmento *PQ*? ______

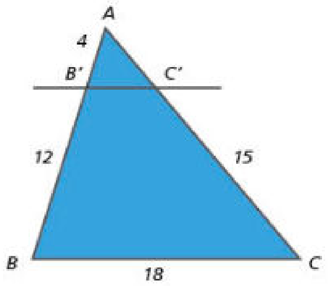
g) ¿En cuántas partes se tiene que dividir un segmento para representar la razón 2:5? ______

h) ¿En cuál de los siguientes segmentos la razón entre los dos segmentos es 3:4?, ¿por qué? ______



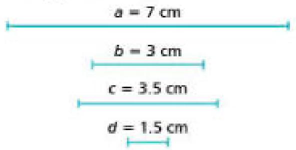
2. Expliquen a sus compañeros en qué basaron su decisión y al mismo tiempo contrasten sus argumentos; ¿coinciden en la decisión?, ¿por las mismas razones? ______

3. En el siguiente triángulo *ABC* se eligió, sobre el lado *AB*, un punto *B'*, de forma que *AB'* = 4 cm. Se trazó una paralela al lado *BC* por *B'*, que cortó al lado *AC* en *C'*, como se muestra en la figura. Con base en la información proporcionada, contesten las preguntas.



Recuerda que...

Para afirmar que dos pares de segmentos son proporcionales, el cociente entre ellos debe ser igual. Considera los segmentos *a*, *b*, *c* y *d* de la figura, así como las razones de los segmentos.



La razón de los segmentos *a* y *b* es:
$\frac{a}{b} = \frac{7}{3} = 2.\overline{3}$

La razón de los segmentos *c* y *d* es:
$\frac{c}{d} = \frac{3.5}{1.5} = 2.\overline{3}$

Como las razones son iguales, se dice que los segmentos *a* y *b* son proporcionales a los segmentos *c* y *d*.

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas, explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en el análisis de los segmentos y figuras mostradas para resolver las preguntas?
2. ¿Comparó con otros equipos sus respuestas?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros en la discusión acerca de los procedimientos que utilizaron?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su pareja, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

a) ¿Cómo son los ángulos del triángulo *ABC* respecto de los ángulos del triángulo *AB´C´*? Explica. ______

b) ¿Qué resultado obtienes al dividir la longitud del lado *AB'* entre la longitud del lado *B'B*? ¿Cómo utilizarías este resultado para obtener la longitud del lado *AC'*? ______

c) ¿Los lados del triángulo *AB´C´* son proporcionales a los lados del triángulo *ABC*?, ¿por qué? ______

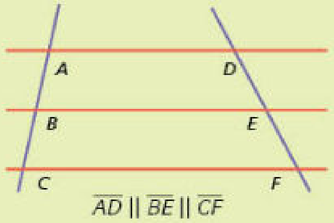
d) Si trazaras otra recta paralela al lado *BC* por cualquier punto del lado *AB*, ¿los triángulos resultantes serían semejantes? Explica por qué. ______

e) ¿Se mantendría la relación de semejanza si trazas una paralela al lado *AC*?, ¿y al lado *AB*? Justifica tus respuestas y compáralas con las de tus compañeros. ______

Teorema de Tales de Mileto

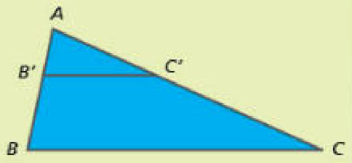
"Si varias rectas paralelas cortan a dos rectas transversales, entonces, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales".

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$



El recíproco del Teorema de Tales señala:

"Si varias rectas cortan dos rectas secantes y determinan sobre ellas segmentos proporcionales, entonces, estas rectas son paralelas".



Teorema de Tales aplicado a los triángulos: "Toda recta paralela a un lado de un triángulo, que corta a los otros dos lados, determina un triángulo semejante al original".

Es decir, si $BC \parallel B'C'$, entonces los triángulos *AB'C'* y *ABC* son semejantes entre sí.

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

A este enunciado se le conoce como el recíproco del Teorema de Tales aplicado a los triángulos.

1. Discutan lo leído, identifiquen situaciones en las cuales pueden aplicar el Teorema de Tales de Mileto y presenten al grupo sus ideas.

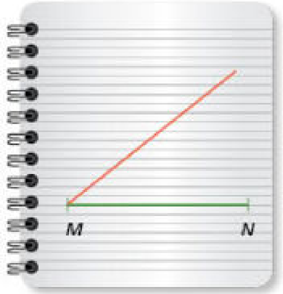
¡A investigar!

En libros de Geometría o en internet investiga:

- Los segmentos tercero y cuarto proporcionales.
- La construcción de los segmentos cuarto y tercio proporcionales.
- ¿En qué tipo de situaciones puedes utilizar los conceptos indagados anteriormente? Trata de mostrar tus ideas mediante un ejemplo.

En parejas

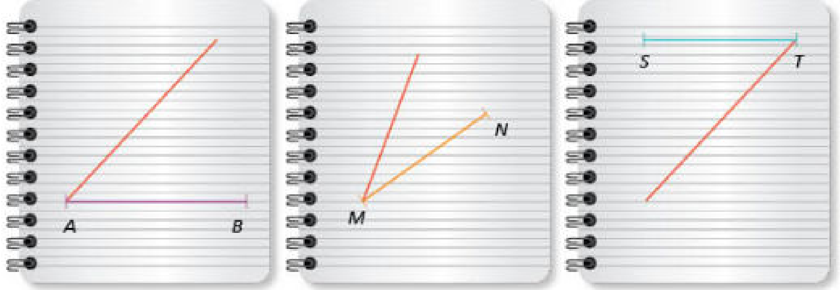
1. Por parejas, en una hoja rayada, tracen un segmento *MN* y una recta roja a partir de *M* como si fueran a dividir el segmento *MN* (imagen de la derecha).



a) Ahora, observen la hoja en que hicieron el dibujo. ¿Cómo son entre sí las rayas de la hoja? ______

b) Si se quiere dividir el segmento en cinco partes iguales y no se tiene un compás, ¿cómo utilizarían el rayado de la hoja para auxiliarse al hacer los trazos sobre la recta de color rojo?, ¿y si se quiere dividir en más partes? ______

c) Dividan los siguientes segmentos en 3, 4 y 7 partes iguales, respectivamente.

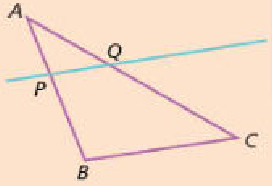


2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

Tecnología

Con el programa *Geogebra* vas a explorar y verificar el Teorema de Tales. Para ello, sigue los pasos que se te indican.

1. Con *Polígono* construye un triángulo. Utiliza *Nuevo punto* y coloca un punto sobre uno de sus lados y después con *Recta paralela* traza una paralela por dicho punto a cualquiera de los otros dos lados, como se muestra en la figura de la derecha.



Tecnología

Considerando la figura anterior, ¿en cuántos segmentos queda dividido el lado AB?, ¿y el lado AC? ____________ Recuerda que en tu dibujo los nombres de las rectas pueden ser distintos.

2. Con el botón *Distancia o longitud*, mide la longitud de AP, PB, BC, QC, AQ, PQ. Después, utiliza una calculadora para realizar las siguientes operaciones.
3. Divide la longitud de $\overline{AP}$ entre la longitud de $\overline{PB}$.
4. Divide la longitud de $\overline{AQ}$ entre la longitud de $\overline{QC}$.
   a) ¿Cuáles son los segmentos proporcionales? ____________
   b) Mueve el punto P. ¿Se mantienen proporcionales los segmentos? ¿Por qué? ____________
   c) Traza rectas paralelas a otro de los lados del triángulo ABC. ¿Qué segmentos son proporcionales? ¿Obtendrás siempre segmentos proporcionales? ____________
5. Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

Escala es la razón de las longitudes de una reproducción y el objeto original.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Divido un segmento en partes utilizando las propiedades de semejanza.			
Resuelvo problemas que impliquen aplicar las propiedades de la semejanza en diversos polígonos.			
Resuelvo problemas utilizando el Teorema de Tales y su recíproco.			
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades? ¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño? ¿Cómo apliqué los razonamientos matemáticos involucrados en esta lección en la resolución de problemas? Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:			

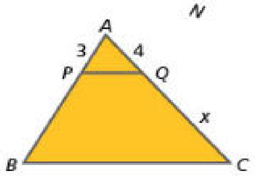
Recuerda que en la medida en que identifiques tus debilidades y fortalezas, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

1. Divide los siguientes segmentos en el número de partes que se indica en cada caso. Utiliza regla no graduada y compás.
   a) Divide el segmento AB en siete partes iguales.
   b) Divide el segmento MN en cinco partes iguales.

2. Los lados PQ y BC son paralelos entre sí.

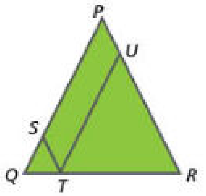
   ¿Cuánto mide el segmento x? ____________

   $\overline{AB} = 9$



3. Divide el segmento ST en dos partes, cuya razón entre las medidas de las dos partes sea 4:7.

4. El triángulo PQR es equilátero de 16 cm por lado. Los triángulos PQR y STQ están a escala 1:4 y el lado TU es paralelo al lado PQ.
   a) ¿Cuál es la longitud de los lados del triángulo STQ? ____________
   b) ¿Cuál es la longitud de los segmentos TR y UR? ____________
   c) ¿Cuál es el perímetro del trapecio $PRTS$? ____________



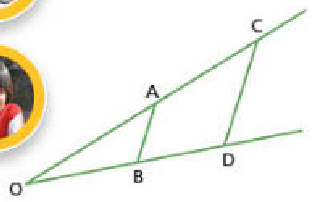
5. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y coméntalas.

Construcción de figuras homotéticas

Programa

Eje: *Forma, espacio y medida*
Tema: *Figuras y cuerpos*
Contenido: *Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.*

1. Observa la siguiente figura y contesta lo que se te pide.



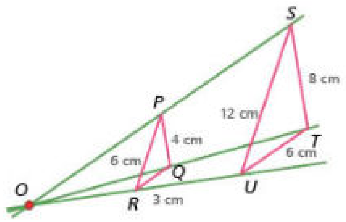
$(\overline{OA}) = 6$ cm $(\overline{OB}) = 4$ cm
$(\overline{AB}) = 3$ cm $(\overline{OC}) = 12$ cm
$(\overline{OD}) = 8$ cm $(\overline{CD}) = 6$ cm

   a) Calcula los cocientes que se indican a continuación:

   $\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} =$ $\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} =$ $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} =$

   b) ¿Son semejantes los triángulos OAB y OCD? Argumenta tu respuesta. ____________

2. Compara tus respuestas con las de tus compañeros e identifica la proporcionalidad entre los segmentos para determinar la semejanza de los triángulos.
3. Ahora, observa la siguiente figura y contesta lo que se te plantea.



   a) Con los datos de la figura, ¿es posible afirmar que los triángulos PQR y STU son semejantes? ¿Cuál es la proporción entre dichos triángulos? Justifica tus respuestas. ____________
   b) Si las distancias de los segmentos OP y OS, OQ y OT y OR y OU varían en la misma proporción, ¿los triángulos PQR y STU serán semejantes? Argumenta tu respuesta. ____________

Al margen
¿Cuándo fue la última vez que fuiste a un cine?
En las salas de cine se cuenta con un proyector de imágenes especial, que usa una potente lámpara como fuente de luz y la película en forma de cinta delgada. El proceso es sencillo: en su base, la fuente de luz pasa por la cinta y se proyectan en la pantalla del cine imágenes pequeñas a gran tamaño. Las pantallas de cine más grandes llegan a medir entre 20 m por 28 m y 22 m por 16 m, aunque no hay un estándar, pueden ser incluso mayores.

El primer proyector cinematográfico fue patentado en 1894 por los hermanos Lumière.

¿Qué relación hay entre la proyección que hacen en un cine y la de un videoproyector o cañón?

c) ¿Cómo son entre sí los pares de lados homólogos de los triángulos *PQR* y *STU*? Justifica tu respuesta. ______________________

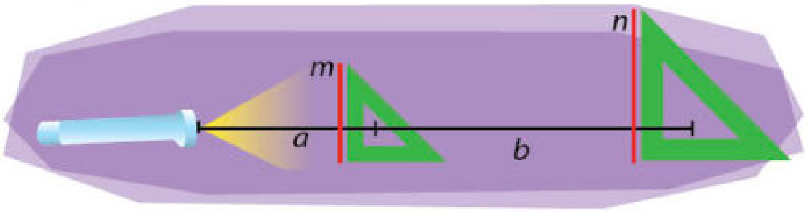
4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y describe las propiedades que observas en relación con los elementos de la construcción.

En equipo

1. Reúnanse en equipos de tres integrantes para realizar la actividad que se describe a continuación.

Los materiales que requerirán son: una lámpara (o la luz que emana de un retroproyector), objetos diversos (un lápiz, borrador, escuadra, etcétera) y un flexómetro.

a) Tomen uno de los objetos y, utilizando la lámpara, proyéctenlo sobre la pared.



b) Acerquen y alejen la lámpara del objeto y describan qué sucede en ambos casos. ______________________

c) Ahora, dejen fija la lámpara a 1 m de la pared y acerquen y alejen el objeto de ella. Describan qué sucede en ambos casos. ______________________

d) Registren las distancias entre la lámpara y el objeto y entre éste y la sombra. Asimismo, registren la longitud del objeto y la de la sombra.

e) ¿Cuál es la razón entre la distancia de la lámpara al objeto (*a*) y de éste a la sombra (*b*)? ¿Cuál es la razón entre la altura del objeto (*m*) y la altura de su sombra (*n*)? ¿Qué relación hay entre las razones anteriores? Justifiquen sus respuestas. ______________________

2. Comparen sus respuestas con las de los demás equipos y valídenlas utilizando otros objetos.

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas, explicando por qué piensan así:

1. ¿Enfrentó algún problema en el desarrollo del experimento?
2. ¿Verificó la igualdad entre las razones de las distancias y las longitudes de los objetos?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros?
4. ¿Qué aspectos de su participación deben mejorar?

¡A investigar!

La *cámara oscura* es el antecedente de la fotografía. Aun cuando no se sabe cuándo y quién descubrió la cámara oscura, sí es posible asegurar que antes de ser utilizada para realizar imágenes fotográficas, fue considerada como una herramienta útil para profundizar en el conocimiento de la fotografía.

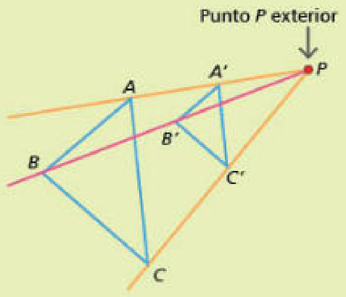
Investiga en internet el procedimiento para elaborar una cámara oscura; por ejemplo, en la siguiente dirección: http://www.slideshare.net/oscarvegasoria/cmo-hacer-una-cmara-oscura (Consulta: 23 de enero de 2017).

- Con base en tu investigación, elabora una cámara oscura y realiza actividades que te permitan poner en práctica los contenidos de la lección.

Presenta tus experiencias a tus compañeros, destacando la aplicación de la semejanza.

Para avanzar

Dado un polígono y un punto *P* interior o exterior a él, se trazan rectas desde este punto hacia cada uno de los vértices del polígono, construyendo polígonos semejantes. Este tipo de transformación se llama homotecia y al punto *P* se le llama centro de homotecia.



Los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son semejantes, ya que la proporción *k* (constante de proporcionalidad) entre sus lados homólogos es la misma, es decir:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = k$$

Los lados de los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son proporcionales, ya que las distancias de cada vértice de los triángulos al punto *P* están a la misma razón *k*, es decir:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{A'P'}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{B'P'}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{C'P'}} = k$$

También se puede decir que los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son figuras homotéticas, ya que sus lados correspondientes son paralelos.

La semejanza entre las dos figuras se llama razón de homotecia.

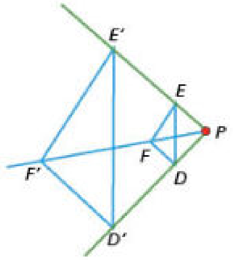
La razón de homotecia nos ayuda a determinar si la figura homotética que resulte es una ampliación o una reducción, ya que $A'P = kAP$.

Si $k > 1$; se produce un aumento en la figura.

Si $k < 0$; se produce una figura inversa en el lado opuesto del *centro de homotecia*.

¿Qué sucede con la figura cuando $k < 1$? ______________________

1. Observen la siguiente figura y contesten las preguntas planteadas.



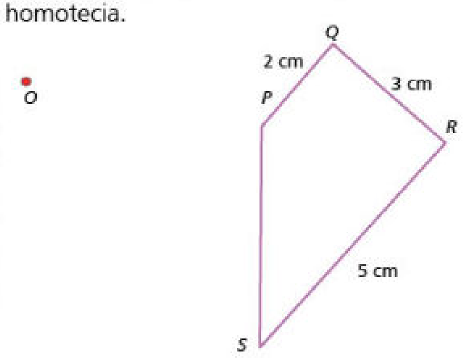
a) Si los triángulos *DEF*, *D'E'F'* son homotéticos, ¿cuáles son los lados homólogos? ______

b) Si $DE = 2$ cm, $E'F' = 4.5$ cm, $DF = 1.1$ cm, $D'E' = 6$ cm, ¿cuáles son las medidas de los demás lados de cada uno de los triángulos? ______

c) ¿Cuál es la razón de homotecia? Argumenten su respuesta. ______

2. Comparen sus respuestas con las de otras parejas y analicen la figura con respecto al centro y a la razón de homotecia.

3. En la siguiente figura, tomen el punto *O* como centro de homotecia y únanlo con el vértice *P* del polígono, prolónguenlo una distancia igual a *OP* para ubicar el punto *P'*. Hagan lo mismo con los puntos *Q*, *R* y *S* para formar el polígono *P'Q'R'S'*.



a) ¿Qué relación existe entre la medida de los lados de los polígonos *PQRS* y *P'Q'R'S'*? ______

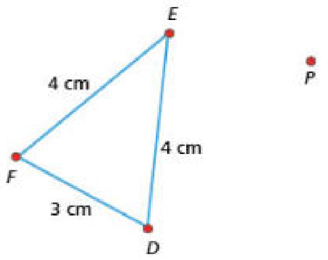
b) ¿Cómo son los ángulos de ambos polígonos? ______

c) ¿Qué relación existe entre los perímetros de ambos polígonos? ¿Y entre las áreas? ______

d) ¿Cuál es la razón de homotecia? Argumenten su respuesta. ______

4. Comparen sus trazos con los de sus compañeros y analicen qué sucede con el polígono al aplicársele la razón de homotecia.

5. Construyan la figura homotética al triángulo *DEF*, teniendo a *P* como el centro de homotecia.



a) ¿En qué posición está el nuevo triángulo con respecto al original? ______

b) ¿En dónde se ubica el centro de homotecia con respecto de las dos figuras? ______

c) ¿Cuál es la distancia *PE*? Y la distancia *PE'*? ______

d) Si consideran el centro de homotecia *P*, como origen de una recta numérica, ¿cuál es el sentido que tiene la distancia *PE*? ¿Y el sentido de *PE'*? Justifiquen sus respuestas. ______

e) ¿Cuál es la razón de homotecia? ______

f) ¿Cuál es el perímetro de ambas figuras? ¿Cuál es su área? ______

6. Comparen sus trazos con los de otras parejas y describan las características que permanecen invariables y las que cambian en las figuras homotéticas.

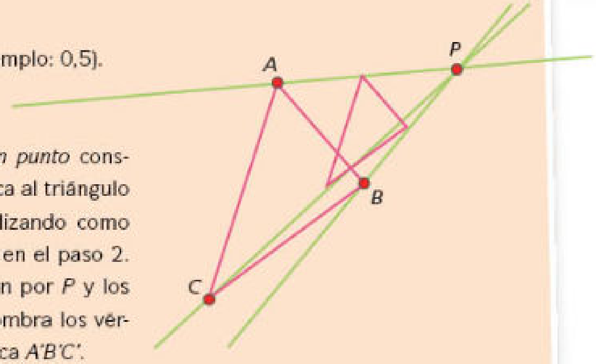
Tecnología

Utilizando *Geogebra* u otro programa para geometría dinámica realiza lo siguiente.

1. Construye un triángulo y nombra sus vértices *A*, *B* y *C*. Coloca un punto exterior al triángulo y llámalo *P*.

2. Coloca un número (por ejemplo: 0,5).

3. Con *Homotencia desde un punto* construye una figura homotética al triángulo *ABC* con centro en *P*, utilizando como razón el número indicado en el paso 2. Traza las rectas que pasen por *P* y los vértices de las figuras. Nombra los vértices de la figura homotética *A'B'C'*.



Tecnología

4. Manipula y arrastra el punto *P*, ¿los triángulos siguen siendo homotéticos? Justifica tu respuesta. ______________________________

5. Modifica la *razón de homotecia* y describe qué sucede cuando el valor es mayor que cero, igual que 1, igual que −1 o menor que 1. Describe lo que observas.

6. Comenta con tus compañeros los resultados de la actividad y manipulen otros objetos de la construcción.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Identifico y calculo la razón de homotecia.			
Determino la razón de homotecia e identifico las características que permanecen invariables y las que cambian en las figuras homotéticas.			
Aplico la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.			

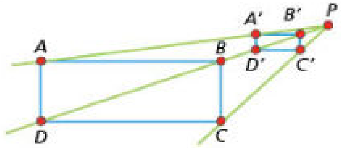
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades?
¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño?
¿Cómo demostré disposición para el estudio de los contenidos de esta lección?
Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:

Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

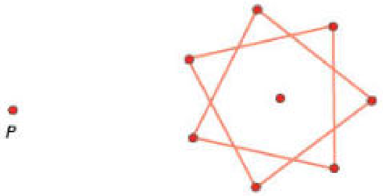
1. Obtén el perímetro y área de los siguientes rectángulos de acuerdo con la figura mostrada, si $AB = 6$ cm, $AD = 2$ cm, $PC' = 1.2$ cm y $C'C = 3.6$ cm.

Perímetro: ______________________

Área: ______________________



2. Construye las figuras homotéticas a la siguiente figura, las cuales son correspondientes a las razones de homotecia $\frac{1}{3}$ y −1.5 respecto al punto *P*.



3. A una figura se le aplica una homotecia con una razón igual a 1.5 y a la figura resultante se le aplica una homotecia con una razón de 3, respecto al mismo centro de homotecia.

   a) ¿Qué razón se debe aplicar a la figura original para obtener una figura simétrica del otro lado del centro de homotecia del mismo tamaño que la tercera? Argumenta tu respuesta. ______________________

   b) Realiza la construcción que corresponda al planteamiento del problema.

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y en caso de tener algunas dificultades solicita apoyo de tu profesor.

Funciones cuadráticas

Programa

Eje: *Manejo de la información*
Tema: *Proporcionalidad y funciones*
Contenido: *Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.*

Los fenómenos que nos rodean no siempre se modelan con funciones del mismo tipo. Por ejemplo, la relación entre el consumo de gasolina de un auto y la distancia que recorre es de tipo lineal; por otro lado, la relación entre la manera en que aumenta o disminuye su velocidad, o sea su aceleración, es de tipo cuadrática.

En la escuela de Carlos compraron un nuevo videoproyector. Al comenzar a probarlo se dieron cuenta de que a mayor distancia de la superficie donde se iba a proyectar, mayor era el área del cuadrado que se observaba proyectado.

1. En la siguiente tabla se muestran algunas de las mediciones que se obtuvieron al realizar pruebas con el videoproyector en una pared. Complétala y contesta las preguntas:

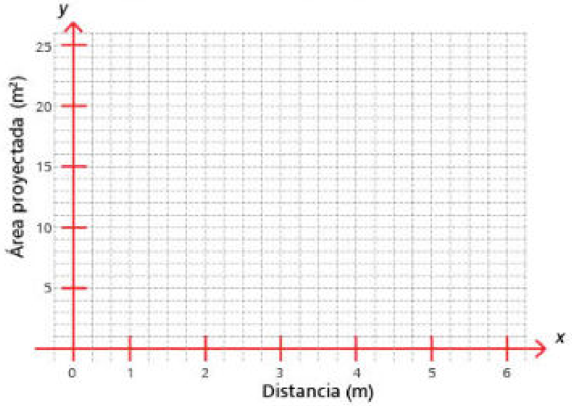
Distancia del proyector a la pared (m)	1	2	3	4	5	6
Área del cuadrado proyectado (m²)	1		9			36

   a) ¿Cuál es el área proyectada cuando el videoproyector se encuentra a 2 m de distancia de la pared?, ¿y cuando está a 3 m de distancia? ¿Cuál a 4 m y a 5 m? ______________________

   b) ¿Cómo obtuviste los resultados del inciso anterior? ______________________

   c) ¿Qué relación observas entre la distancia entre el videoproyector y la pared y el área que proyecta? Descríbela. ______________________

2. Con base en la tabla anterior, traza en el plano cartesiano la gráfica que ilustre la relación entre la distancia del videoproyector y la pared con el área proyectada. Luego, contesta las preguntas.



Al margen
La representación gráfica de las funciones cuadráticas es una parábola, la cual ha inspirado a muchos arquitectos y escultores en sus trabajos. Otra aplicación se da en las iglesias, donde se puede observar una gran cantidad de parábolas soportando sus estructuras.

Arco Gateway, San Luis Missouri.

¿Qué forma tiene una parábola?
Menciona en grupo algunos ejemplos donde se observe la parábola.

Parábola es la curva abierta formada por dos líneas simétricas respecto de un eje y en la que todos sus puntos están a la misma distancia tanto del foco como de la directriz.

a) ¿Qué tipo de gráfica obtuviste? ____________________

b) Observa la gráfica, ¿a qué distancia se proyectan 6.25 m^2 sobre la pared? ¿Y a qué distancia se proyectan 13.69 m^2? ____________________

c) Si la pared donde se realizaron las pruebas mide 8.5 m de ancho por 6.5 m de alto, ¿cuál fue la mayor área que se pudo proyectar y a qué distancia se colocó el proyector? ____________________

d) Si representas con d la distancia del proyector a la pared y con P el área proyectada, escribe una expresión algebraica que represente la relación entre dichas magnitudes. ____________________

3. Compara tus respuestas con las de otro compañero. Luego, discutan las siguientes preguntas: ¿la relación que existe entre la distancia y el área es lineal o cuadrática? ¿por qué? ¿Cuál es la variable dependiente, la distancia o el área? ¿La expresión algebraica que representa la relación entre las dos variables es $P = d^2$? En caso de dudas, coméntelas con su profesor y entre todos escriban una conclusión.

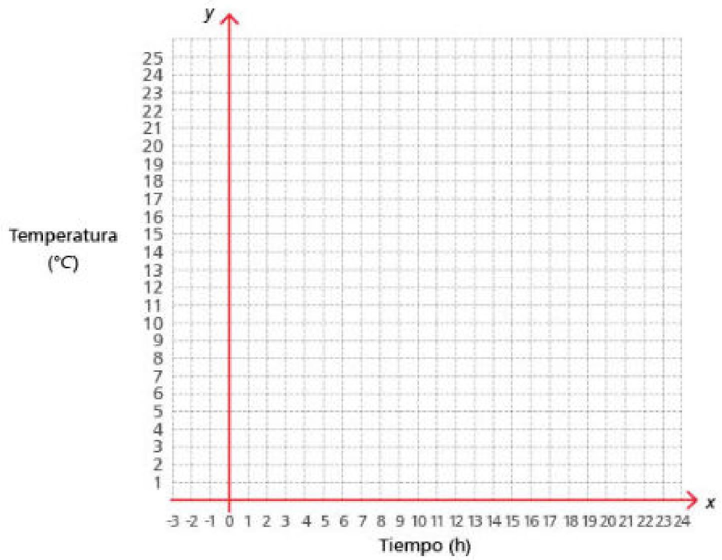
4. Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema.

Un grupo de científicos realiza un estudio sobre la variación de la temperatura en una zona del desierto de Sonora. Luego de t horas, pasada la medianoche, la variación de la temperatura se expresa con la siguiente función:

$T = \frac{-1}{4}t^2 + 4t + 10°C$; donde:

T= temperatura t= tiempo en horas $°C$= grados centígrados

a) Grafiquen en el siguiente plano la temperatura en función del tiempo.



b) ¿Cuál fue la temperatura a las 2 de la mañana? ____________________

c) ¿A qué hora la temperatura fue máxima? ____________________

5. Comparen sus respuestas con la guía de su profesor y de manera grupal, escriban qué tipo de relaciones se dan en la dependencia entre una magnitud y otra; por ejemplo, ¿se dan expresiones cuadráticas?, ¿qué características presentan las gráficas de relaciones cuadráticas?

En equipo

1. Formen equipos de cuatro integrantes y resuelvan lo siguiente: Una empresa construye cajas en forma de cubo mediante una máquina en la que solamente se debe oprimir la medida de arista que tendrá la caja.

a) ¿Qué volumen tiene la caja cuya arista mide 0.1 m?, ¿y la de arista igual a 0.5 m?, ¿y la de 3 m? ____________________

b) Si desearan construir una caja de 4 m de arista, ¿cuál sería su volumen?, ¿cuál su área total? ¿Cuál es la longitud total de sus aristas?

____

c) ¿Cuál es la medida de la arista de una caja que tiene 125 m^3 de volumen? ____________________

d) Para conocer las medidas de distintas partes de las cajas que fabrica la empresa, se elaboró la siguiente tabla. Complétenla anotando volumen, área total y longitud total de aristas que le corresponde a cada caja según la medida de la arista:

Medida de la arista (m)	0.1	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
Longitud total de las aristas (m)	1.2			1.8				
Área total de la caja (m^2)		1.5				37.5		
Volumen de la caja (m^3)					8.0			

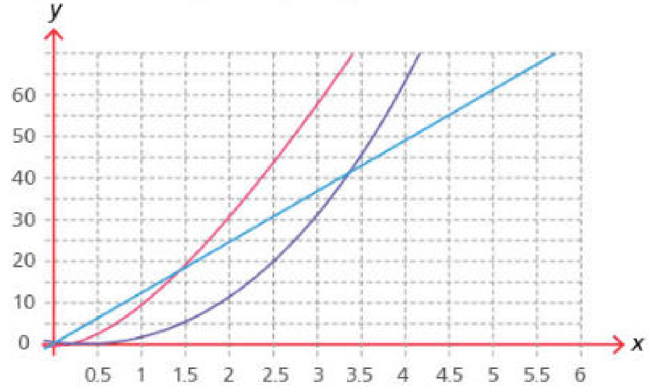
e) Describan las relaciones que existen entre la medida de la arista de una caja y su volumen, así como la que existe con el área total y la longitud total de sus aristas. ____________________

f) Si representan con a la medida de la arista de la caja, con V su volumen, con T el área total y con L la longitud total de sus aristas, escriban una expresión algebraica para cada una de las relaciones entre dichas magnitudes con la arista de la caja. Justifiquen su respuesta.

____

2. Las gráficas del siguiente plano representan la relación que existe entre la medida de la arista de cualquier caja con su volumen, el área total y la longitud total de sus aristas. Escriban en cada gráfica la expresión algebraica que le corresponde.

a) ¿De qué color es la gráfica que representa el volumen de las cajas?



- ¿Por qué es esa la gráfica que le corresponde a la expresión algebraica?

____

b) ¿De qué color es la gráfica que representa el área total de las cajas? ¿Por qué es esa la gráfica que le corresponde a la expresión algebraica?

____

____

c) ¿De qué color es la gráfica que representa la longitud total de las aristas de las cajas? ¿Por qué le corresponde esa gráfica a la expresión algebraica? ______________________

____

____

3. Comparen y validen sus respuestas con las de otros equipos. Si tienen dudas, pidan el apoyo de su profesor y pongan sus respuestas a consideración de todos sus compañeros. En donde no coincidan, verifiquen por qué.

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en dar argumentos válidos a las respuestas de las distintas preguntas de los problemas?
2. ¿Verificó con otros equipos sus respuestas y procedimientos?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de otros compañeros?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su compañero, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

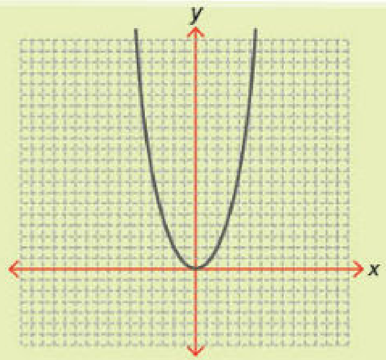
Para avanzar

Reúnete con un compañero y analicen la siguiente información. Luego, contesten lo que se pregunta.

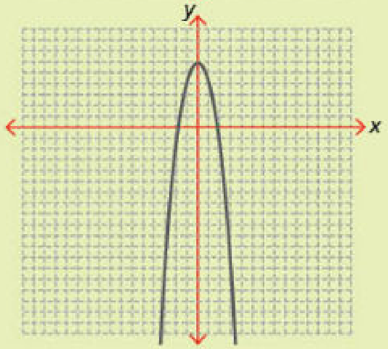
Función polinómica de grado 2 o función cuadrática

Se denomina función cuadrática a toda función de la forma: $y = ax^2 + bx + c$, donde a es distinto de 0, y b y c son números cualesquiera. La gráfica que se forma al representar funciones cuadráticas es una curva con forma de U, llamada parábola. Los siguientes son ejemplos de funciones cuadráticas con sus gráficas.

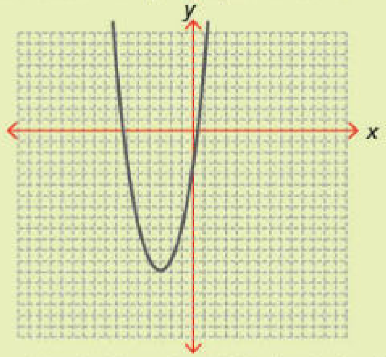
$y = x^2$



$Y = -3x + 2$



$y = 2x^2 + 5x - 1$



De acuerdo con la información anterior, si el signo de a indica hacia dónde se abre la parábola, ¿hacia dónde abre la parábola cuando a es positivo? ¿Y cuando es negativo?

Tecnología

Mediante una hoja de cálculo explorarás el fenómeno físico llamado tiro parabólico, el cual experimentan los cuerpos al ser lanzados. Uno de los casos más comunes es el que se presenta cuando lanzamos una piedra al aire.

Las fórmulas que se utilizan para modelar el lanzamiento de un cuerpo son las siguientes:

$$h = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{y} \quad v = v_o - gt$$

Donde:

h= altura del objeto lanzado en cierto instante t (relativa a su posición inicial)

Tecnología

v_o = velocidad inicial del objeto (positiva si es lanzado hacia arriba y negativa si es lanzado hacia abajo)
t = tiempo
g = aceleración de la gravedad que equivale a 9.8 m/s^2
v = velocidad del objeto en cierto instante t

1. Una persona lanza una piedra hacia arriba con una velocidad inicial de 50 m/s^2. Sin tener en cuenta la estatura de la persona, contesta las preguntas de acuerdo con la hoja de cálculo.

a) La columna A se refiere al tiempo en segundos que transcurre desde que se lanzó la piedra, ¿qué fórmula debes anotar en B2 para conocer la altura a la que se encuentra la piedra en cualquier instante (t)? ____________

b) ¿Qué fórmula debes anotar en C2 para conocer la velocidad que presenta la piedra en cualquier instante (t)? ____________

c) ¿Por qué los valores de la altura comienzan a crecer y después decrecen?, ¿cuál es la altura máxima que alcanza la piedra? ____________

d) ¿Por qué los valores de la velocidad primero son positivos y después, negativos?, ¿en qué instante la velocidad es cero? ¿Qué relación existe entre el instante donde la velocidad es cero y la altura a la que se encuentra la piedra?
____
____

e) ¿Qué tipo de expresión algebraica representa la altura?, ¿cómo debe ser su gráfica?, ¿qué tipo de expresión algebraica representa la velocidad?, ¿cómo debe ser su gráfica? ____________
____

f) En tu cuaderno esboza la gráfica que relaciona el tiempo con la altura de la piedra, así como la que relaciona el tiempo con la velocidad de la piedra. Después, construye dichas gráficas con el asistente de gráficos de la hoja de cálculo. ¿Coinciden con el esbozo en tu cuaderno?, ¿por qué? ____________
____
____

2. Compara tus respuestas con las de otros compañeros.

¡A investigar!

Visita la siguiente página electrónica: http://nosolomates.es/ayuda/ayuda/parabolas.htm (Consulta: 13 de enero de 2017).

- Con la calculadora que aparece al principio de la página Web, sustituye las funciones que has trabajado en esta lección y analiza las características que describe la calculadora.

1. Un objeto es soltado al vacío desde un edificio de 120 m. Sin tomar en cuenta la resistencia del aire, considerando la fuerza de gravedad (g) como 9.8 m/s^2, y utilizando la fórmula de caída libre, $h = v_o t - \frac{1}{2} gt^2$, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el valor de v_o en esta situación? ____________

b) Escribe la expresión que muestre la altura que falta para que el objeto llegue al suelo. ____________

c) Completa la tabla, utiliza para ello la expresión anterior.

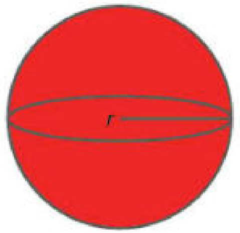
Tiempo (s)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
Altura restante (m)	120									

d) ¿Cuál debe ser el valor de h cuando el objeto llegue al suelo? ____________
____

e) Traza la gráfica que ilustre la situación, para ello usa los valores de la tabla.

f) Escribe la expresión algebraica que represente la velocidad (v) del objeto en cualquier instante (t) y traza su gráfica.

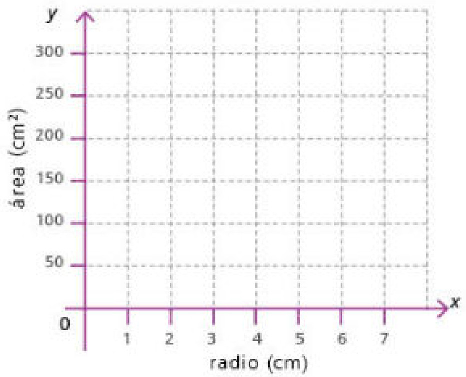
2. Si hacemos una sección por el centro de la esfera, el círculo obtenido se denomina círculo máximo porque es el máximo posible. El área de una esfera se calcula con la fórmula que se muestra a continuación:



$A = 4 \pi r^2$

3. Completa los datos de la tabla que corresponde a la relación entre la medida del radio, el área del círculo máximo y el área de la esfera. Luego, construye las gráficas correspondientes en el mismo plano cartesiano.

Medida del radio (cm)	Medida del área (cm²)	Medida del área de la esfera (cm²)
0		
1		
2		
3		
4		
5		



a) Escribe una expresión algebraica para cada relación de la esfera.

b) ¿Es verdad que el área de la superficie esférica es igual a cuatro círculos máximos? Justifica tu respuesta.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Reconozco las características de relaciones cuadráticas.			
Interpreto y construyo gráficas de relaciones cuadráticas.			
Identifico que en relaciones cuadráticas, la variable dependiente crece muy rápido en comparación con la variable independiente.			
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades? ¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño? ¿Qué actitudes asumí para desarrollar el hábito del pensamiento racional? Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:			

Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

Gráficas formadas por secciones rectas y curvas

Uno de los aspectos de las matemáticas que con frecuencia encontramos en la vida diaria es la lectura de gráficas. En periódicos o revistas es común encontrar información financiera, política, científica o de cualquier otra índole, representada en forma de gráficas.

1. Analiza la siguiente situación y contesta las preguntas que se te plantean.

A Lorena le gusta practicar el ciclismo. Un fin de semana por la mañana realizó el siguiente recorrido:

- Avanzó a baja velocidad durante dos horas.
- Recorrió un camino de subida muy inclinada.
- Hizo un descenso a alta velocidad.
- Al llegar a un área de descanso permaneció ahí por un rato.

a) Cada una de las acciones anteriores las realizó en distinto orden. Auxíliate con la siguiente gráfica y contesta, ¿en qué orden llevó a cabo cada acción?

b) ¿Qué distancia recorrió al subir el camino con mayor pendiente?, ¿en cuánto tiempo lo hizo?

c) ¿Cuánto tiempo permaneció en el área de descanso?

d) ¿Qué tiempo empleó en el descenso a alta velocidad?, ¿y qué distancia recorrió?

e) ¿Qué tiempo empleó en el camino de baja velocidad?

f) ¿Cuánto tiempo hizo Lorena en todo el recorrido, incluido el tiempo de descanso? Justifica tu respuesta.

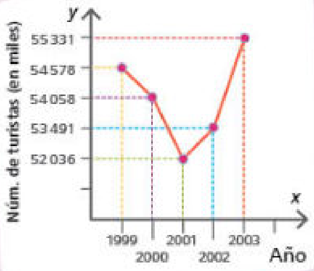
2. Comenta tus respuestas con tus compañeros.

Programa

Eje: *Manejo de la información*
Tema: *Proporcionalidad y funciones*
Contenido: *Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.*

Al margen

Los medios audiovisuales e informáticos recurren a las gráficas para condensar en ellas gran cantidad de información. La mayor parte de estas gráficas representan un proceso dinámico; es decir, una relación entre una cantidad que varía mientras otra también lo hace. La lectura e interpretación de estas gráficas es cada vez más importante para una formación adecuada.



Describe de manera breve la gráfica que estamos presentando e intenta darle un contexto.

Velocidad es la magnitud física que expresa el espacio recorrido por un móvil en la unidad de tiempo. Su unidad en el Sistema Internacional es el metro por segundo (m/s). Velocidad constante es un movimiento en línea recta y con rapidez constante.

1. La situación que se describe a continuación corresponde a una excursión de un grupo de alumnos de escuela secundaria. La salida fue a las 8:00 a.m. El autobús avanzó a velocidad constante hasta las 10:00 a.m. y recorrió en ese tiempo 180 km. Se detuvo durante media hora en un sitio de descanso para que los alumnos bajaran al baño. El resto del viaje se hizo también a velocidad constante, llegando a su destino a la 1:00 p.m. En total recorrió 430 km.

a) ¿Cuánto tiempo hizo el autobús para llegar a su destino, sin considerar el tiempo que permaneció parado? ____________

b) ¿A qué velocidad iba antes de hacer el descanso? ____________

c) ¿Cuál fue la velocidad del autobús al continuar su recorrido?, ¿cuántos kilómetros recorrió en ese tiempo? ____________

d) Representen la situación anterior en el siguiente plano cartesiano.

e) En la siguiente gráfica se describe el regreso del autobús. Expresen por escrito su comportamiento durante el viaje.

Recuerda que...

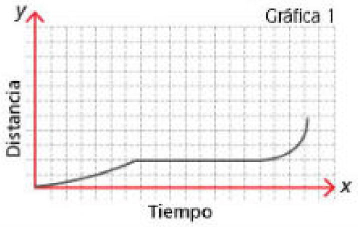
Un modo de representar y estudiar los movimientos es por medio de gráficas que representan distancia-tiempo (distancia en función del tiempo), velocidad-tiempo (velocidad en función del tiempo).

2. Comparen sus respuestas y gráficas con las de sus compañeros.

1. Formen equipos de tres integrantes, luego lean y resuelvan lo que se pregunta. Las siguientes gráficas muestran la relación entre el tiempo y la distancia a la cual viaja un ciclista. Analicen las gráficas y realicen lo que se pide.

a) Escriban en su cuaderno una historia breve acerca del ciclista que pueda ser modelada por la gráfica 1.

- ¿En qué tramo de la gráfica se observa que el ciclista viaja más rápido? ¿Por qué? ____________

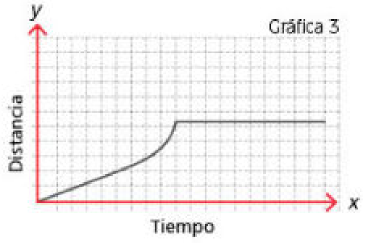


b) Escriban en su cuaderno una historia acerca del ciclista que pueda ser modelada por la gráfica 2.

- ¿En qué tramo de la gráfica se observa que el ciclista viaja más lento? ¿Por qué? ____________

c) Escriban en su cuaderno una historia breve acerca del ciclista que pueda ser modelada por la gráfica 3.

- Especulen sobre lo que podría pasar después y expliquen cómo cambiaría la gráfica. ____________



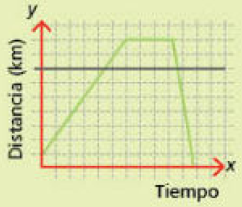
Interpretar una gráfica que modela una situación o fenómeno real consiste en expresar el sentido de lo que en ella se representa.

- En el siguiente esquema se dibujó una vasija y a su derecha, la gráfica correspondiente que relaciona la altura del agua con el tiempo de llenado. Las secciones curvas que se indican en la gráfica se originan porque cuando la vasija es más ancha, el aumento en la altura del agua es menor.
- Bosquejar una gráfica significa modelar, aun cuando no se definan de manera exacta, las partes que la componen. Analiza las siguientes situaciones:

Conforme el ancho de la vasija es el mismo, el aumento de la altura tiende a ser constante.

Conforme el ancho de la vasija aumenta, el aumento de la altura es menor.

De la situación: "Un paseante sale de su domicilio, camina durante tres horas, se para durante una hora y retorna a su casa en autobús", se puede bosquejar la siguiente gráfica:



- En el eje vertical de la gráfica se representa la posición al punto de partida (en km) y en el eje horizontal, la duración (en horas).

1. Escribe en tu cuaderno una historia sobre un recorrido la cual puede corresponder al trazado de la gráfica.

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en el análisis de las gráficas de la actividad "En equipo" y la redacción de una historia que describan las gráficas?
2. En la actividad "En parejas", ¿participó en el análisis de los enunciados para relacionarlos con la gráfica?, ¿comparó con otras parejas sus respuestas?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros en la discusión acerca de los procedimientos que utilizaron?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su pareja, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

1. Lean cada uno de los siguientes problemas y respondan las preguntas.

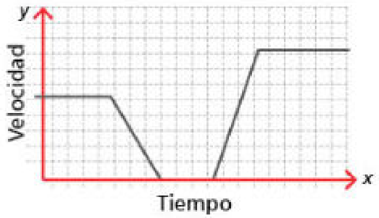
a) Miguel salió a caminar. Durante media hora avanzó muy rápido. Luego, en un tiempo de 15 minutos, redujo su velocidad hasta detenerse a descansar durante 10 minutos. Después, bajó una pendiente pronunciada en cinco minutos.

b) Silvia manejaba su coche a cierta velocidad. Un policía le dijo que se detuviera y después de recibir una infracción y de que el policía se retiró, manejó más rápido. Se fue a una velocidad mayor a la que venía circulando y la mantuvo durante cierto tiempo para recuperar el tiempo que había perdido.

c) Beatriz vive en una casa a desniveles. Se encuentra sentada en la cocina de su casa durante cierto tiempo. Baja las escaleras hacia la sala y ve la televisión durante algún tiempo. Finalmente, sube las escaleras hacia su recámara y se queda dormida.

d) Un tanque estaba a la mitad de su capacidad. Para lavarlo, César abrió la llave del desagüe hasta que quedó vacío. Al terminar de lavarlo, abrió la llave del agua hasta que se llenó y después la cerró.

e) ¿Cuál de los enunciados anteriores se apega mejor a la información proporcionada por la siguiente gráfica? Justifiquen su respuesta.



2. Comparen y comenten sus respuestas con las de sus compañeros.

Tecnología

1. Analiza la siguiente situación y con ayuda de una hoja de cálculo, haz lo que se indica.

- Para prevenir accidentes en carreteras, la policía de caminos presentó a los conductores los datos de las tablas, las cuales muestran la distancia que debe haber entre dos autos de acuerdo con la velocidad de los mismos.

Datos para días con lluvia

Velocidad en km/h	40	55	70	85	100	115	120
Distancia entre autos (m)	16	30.25	49	72.25	100	132.25	144

Datos para días secos

Velocidad en km/h	40	55	70	85	100	115	120
Distancia entre autos (m)	10.6	20.1	32.6	48.1	66.6	88.1	96

Tecnología

a) Copia los datos de las tablas en una hoja de cálculo.

b) Si un conductor viaja a una velocidad de 90 km/h, ¿qué distancia aproximada debe dejar entre su auto y el que circula delante del suyo, con lluvia o en un día seco? ______

c) ¿A qué distancia debe mantenerse el carro que va delante de un conductor que viaja a 130 km/h, con lluvia o sin ella? ______

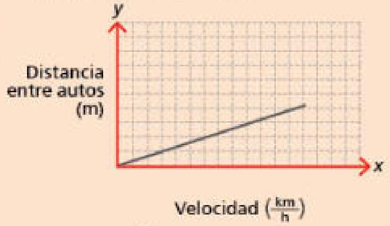
2. Haz en tu cuaderno una gráfica para cada caso que proporcionan las tablas.

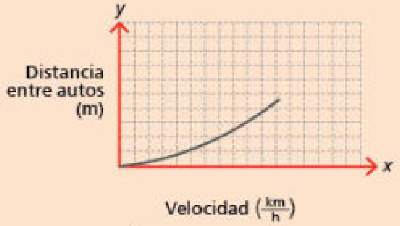
3. Con el *asistente para gráficos* verifica las gráficas que hiciste en el inciso anterior. Para ello, sombrea todos los valores de una de las tablas y da un clic sobre el botón del *asistente*.

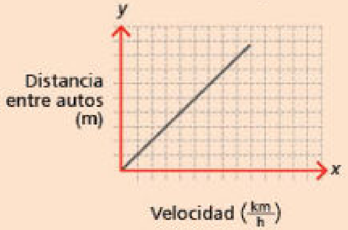
4. Selecciona la opción *Dispersión* y da clic en siguiente. Vuelve a dar clic en siguiente hasta ver la opción *Finalizar*. Sigue el mismo procedimiento con la otra tabla. ¿Son similares a las gráficas que bosquejaste? ______

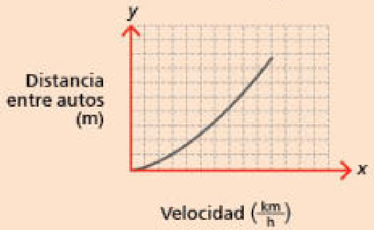
5. Utiliza las gráficas que obtuviste con el asistente para gráficos para estimar la distancia obligatoria entre dos autos que circulan a una velocidad de 110 km/h; con lluvia o en día seco. ¿Es posible, a partir de las gráficas, predecir la distancia a que deben mantenerse separados dos autos que circulen a una velocidad de 140 km/h? ______

6. De las siguientes gráficas, indica cuál corresponde a los datos para días con lluvia y cuál para días secos.









7. Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

¡A investigar!

Un cometa es un cuerpo celeste de hielo y roca que viaja alrededor del Sol. Cuando un cometa se acerca al Sol, parte del hielo se convierte en gas, el cual junto con partículas de polvo se desprende y origina una cola larga y luminosa, característica principal de los cometas. Indaga lo siguiente en algún sitio de internet o en algún libro de Geografía:

- ¿Cómo se clasifican los cometas según su periodo?
- ¿En qué clasificación se ubica el cometa Halley?
- Con base en la órbita del cometa Halley, haz en tu cuaderno la gráfica que relaciona la distancia al Sol con el tiempo en años que tarda en dar una vuelta completa.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Construyo gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento.			
Construyo gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de llenado de recipientes			
Analizo gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.			

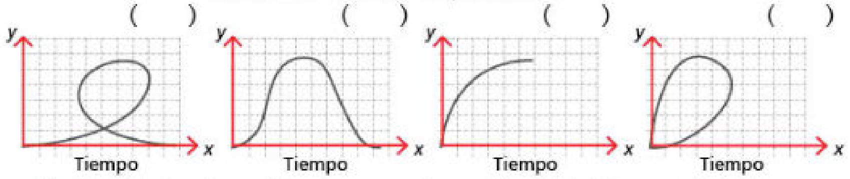
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades?
¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño?
¿Cómo demostré disposición para el estudio de los contenidos de esta lección?
Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:

Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

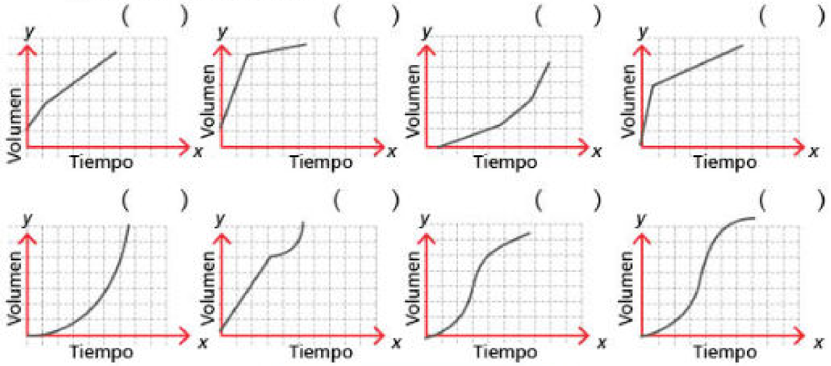
Por tu cuenta

1. Resuelve lo que se indica en cada situación.

a) Representa el lanzamiento de un bumerán en el aire por medio de una gráfica que relacione la trayectoria que recorre con el tiempo que tarda en hacerlo. ¿Cuál de las siguientes gráficas crees que represente mejor el fenómeno? Justifica tu respuesta. ____________



b) Las siguientes gráficas representan el llenado de un recipiente conforme varía su altura. ¿Qué recipiente se asocia con cada una de las gráficas? Relaciónalas.



2. Traza en tu cuaderno cómo deberían ser las gráficas de los recipientes que no encontraste.

3. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y valídenlas con ayuda de su profesor.

Regla del producto

Programa

Eje: *Manejo de la información*
Tema: *Nociones de probabilidad*
Contenido: *Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).*

Piensa y comenta · Individual

1. Completa la siguiente tabla en la que se observa el espacio muestral del experimento que consiste en lanzar dos dados y observar los números que caen de ambas caras.

	1	2	3	4	5	6
1		(1, 2)				
2						
3				(3, 4)		
4						
5						(5, 6)
6			(6, 3)			

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos caras tengan un número impar? Justifica tu respuesta. ____________

b) ¿Cuál de que las dos caras tengan un número diferente? ____________

c) ¿Cuál de que la suma de los números de ambas caras sea 8? ____________

d) ¿Cuál de que la suma de ambas caras sea 8 o 6? Justifica tu respuesta.

e) ¿Cuál de que la suma de los números de ambas caras sea 8 y que ambos números sean iguales? Justifica tu respuesta. ____________

Al margen
¿Alguna vez has participado en juegos de azar?
La probabilidad matemática comenzó como un intento de responder a preguntas que surgían en los juegos de azar; por ejemplo, saber cuántos dados hay que lanzar para que la probabilidad de que salga algún seis supere el 50%. ¿Sabes cuál es la respuesta a este problema?

Dados de seis caras.

2. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y si se presentan diferentes formas de expresar la probabilidad, revísalas con tu profesor.

3. Karen y Diego juegan a girar una ruleta y a lanzar un dado.

Probabilidad es una medición numérica que va de 0 a 1 de la posibilidad de que un evento ocurra. Si la probabilidad está cerca de 0 es improbable que ocurra el evento, pero si se encuentra cerca de uno es casi seguro que ocurra.

a) Completa la siguiente tabla que muestra todos los resultados posibles del juego.

dado / ruleta	1	2	3	4	5	6
1	1, 1		1, 3			
2						2, 6
3	3, 1					

b) ¿Qué probabilidad hay de que salga 1 tanto en la ruleta como en el dado? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no salga 1 en el dado ni en la ruleta? ______

d) ¿Cuál de que salga 1 en el dado o en la ruleta? Justifica tu respuesta. ______

e) ¿Cuál de que salga el mismo número en el dado y en la ruleta? ______

f) ¿Cuál de que la suma del número de la ruleta y del dado sea mayor que 8? ______

g) ¿Cuál de que la ruleta caiga en número impar y el dado en par? Justifica tu respuesta. ______

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y analiza si es posible aplicar alguna fórmula que te permita obtener las respuestas.

5. Se lanzan dos monedas al aire.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en las dos monedas caiga sol? Justifica tu respuesta. ______

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en las dos monedas caiga águila? Justifica tu respuesta. ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un sol y un águila? Describe cómo obtuviste la respuesta. ______

d) Si se lanzan al aire tres monedas, ¿cuál será la probabilidad de obtener sólo águila? ¿Y de obtener únicamente sol? Argumenta tus respuestas. ______

e) Compara tus respuestas con las de tus compañeros, llega a un acuerdo en caso de observar alguna diferencia.

6. Se sabe que en una caja que contiene 20 focos, cinco de ellos están defectuosos. Si se seleccionan dos focos al azar y se sacan de la caja:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer foco esté defectuoso? Justifica tu respuesta. ______

b) Si el primer foco resultó defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo foco también lo esté? Justifica tu respuesta. ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos focos resulten defectuosos? Argumenta tu respuesta. ______

d) Compara tus respuestas con las de tus compañeros y establece algún procedimiento que te permita determinar una regla general.

Reúnanse en equipos de cuatro integrantes y resuelvan las siguientes actividades.

1. Luis organizó un juego con una ruleta y una moneda. En cada turno giraba la ruleta una vez y enseguida arrojaba, también una vez, la moneda. Por ejemplo, un posible resultado es *azul, águila*.

a) ¿Todos los resultados son igualmente probables? Justifiquen su respuesta. ______

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al girar la ruleta y lanzar la moneda al mismo tiempo, se obtenga color verde y sol? ______

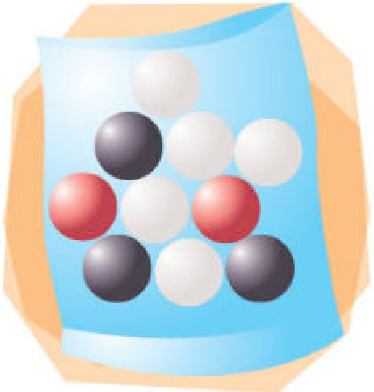
c) Si registran por separado la probabilidad de cada evento, ¿cuál es la probabilidad de que la ruleta caiga en verde? ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda caiga en sol? ¿Qué relación observan entre estos resultados y el que obtuvieron en el inciso anterior? Justifiquen sus respuestas. ______

d) ¿Cuál es la probabilidad de que al girar la ruleta y lanzar la moneda al mismo tiempo se obtenga rojo y águila? ______

2. Comparen sus respuestas con las de los demás equipos y describan la estrategia que utilizaron.

3. Alfonso tiene una bolsa con tres bolas negras, dos bolas rojas y cinco bolas blancas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Alfonso saque una bola roja? ______



Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas, explicando por qué piensan así:

1. ¿Describió sus estrategias para identificar cuando dos eventos son dependientes o independientes?
2. ¿Aplicó la regla del producto para calcular la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros?
4. ¿Qué aspectos de su participación deben mejorar?

b) Si Alfonso saca otra bola sin haber metido la anterior, ¿la probabilidad de sacar otra bola roja es la misma o cambia? Justifiquen su respuesta. ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de sacar primero una bola negra y después una roja, regresando la primera antes de realizar la segunda extracción? ______

d) Si en el caso anterior Alfonso no hubiera regresado la bola de la primera extracción, ¿la probabilidad del evento sería la misma? Justifiquen su respuesta. ______

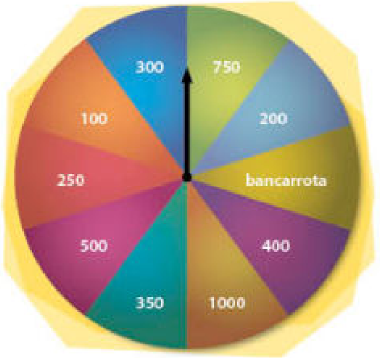
e) ¿El extraer una bola y no regresarla a la bolsa afecta las probabilidades de las siguientes extracciones? Justifiquen su respuesta. ______

f) ¿Sacar una bola y después sacar otra sin regresar la primera a la bolsa son eventos dependientes o independientes? Argumenten su respuesta. ______

4. Comparen sus respuestas con las de los demás equipos y comenten los errores cometidos con la finalidad de que identifiquen en qué casos son eventos dependientes y en cuáles independientes y, a partir de ello, obtengan sus probabilidades.

5. Adriana invitó a sus amigos y amigas a jugar a "La ruleta del dinero", el juego consiste en girar una ruleta que ella diseñó, dividiendo un círculo en varias partes en las que escribió cierta cantidad de dinero. En una parte de la ruleta escribió la palabra bancarrota; si un jugador cae en ella, pierde su turno y todo su dinero.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador que gira la ruleta una vez caiga en bancarrota? ______



b) ¿Cuál es la probabilidad de que al girar la ruleta un jugador obtenga \$ 500 o más? ______

c) Mariana giró la ruleta y obtuvo \$ 350, ¿cuál es la probabilidad de que en su próximo turno obtenga la misma cantidad? Justifiquen su respuesta. ______

d) ¿Cuál es la probabilidad de que al girar la ruleta se obtenga una cantidad igual o inferior a \$ 400? ______

e) Si se cambia la cantidad de 250 por 400, ¿qué probabilidad hay de que al girar la ruleta caiga en 400? Justifiquen su respuesta. ______

6. Comparen y validen sus respuestas con los demás equipos.

Si todos los resultados de un experimento son igualmente probables, se usa la siguiente razón para encontrar la probabilidad clásica de un evento:

Si el resultado de un evento no afecta ni es afectado por el de otro evento, se dice que los dos eventos son independientes.

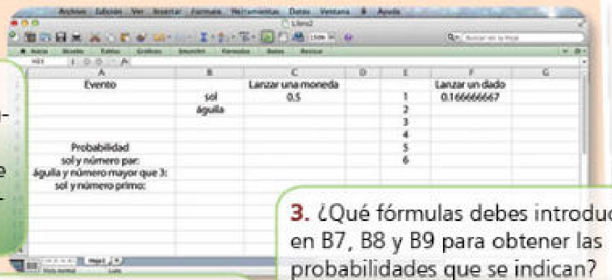
Probabilidad de eventos independientes

Si se lanzan simultáneamente un dado y una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que caiga el número 4 y sol?

Probabilidad = (probabilidad del primer evento) (probabilidad del segundo evento)

$$P = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \qquad P = \frac{1}{12}$$

Tecnología



1. Introduce en la celda C3 una fórmula para obtener la probabilidad de que al lanzar una moneda caiga águila.

2. De las celdas F3 a F7, introduce una fórmula que te permita obtener la probabilidad de que al lanzar un dado caiga 2, 3, 4, 5 o 6.

3. ¿Qué fórmulas debes introducir en B7, B8 y B9 para obtener las probabilidades que se indican?

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y calculen la probabilidad de otros eventos.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

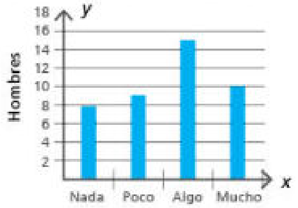
Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Identifico puntos muestrales en un espacio muestral, al calcular la probabilidad de eventos.			
Identifico eventos dependientes e independientes y calculo su probabilidad.			
Aplico la regla del producto en el cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes.			
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades? ¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño? ¿Cómo demostré disposición para el estudio de los contenidos de esta lección? Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:			

Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

1. Si se lanzan cinco volados consecutivos y en todos ha caído águila, ¿cuál es la probabilidad de que en el sexto volado también caiga águila? ____________

2. ¿Cuál es la probabilidad clásica de obtener sólo águilas o sólo soles cuando se lanza una moneda tres veces? ¿Y cuando se lanza cuatro veces?

3. Los maestros de una escuela secundaria encuestaron a los estudiantes de segundo grado para saber cuáles son sus pasatiempos. Una de las preguntas fue: ¿cuánto te interesan los videojuegos? Las siguientes gráficas de barras muestran los resultados correspondientes a 44 mujeres y 42 hombres.



a) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer afirme que le interesan mucho los videojuegos? ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre afirme que le gustan poco los videojuegos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que a un estudiante (hombre y mujer) no le gusten los videojuegos?

4. Compara y valida tus respuestas con las de otros compañeros. Si tienes dudas, pide el apoyo de tu profesor y ponlas a consideración de todos tus compañeros. En donde no coincidan, verifica por qué.

Conexiones

Modelos matemáticos en investigaciones biomédicas

El modelado matemático o uso de las matemáticas se ha fundamentado como una herramienta utilizada actualmente para el estudio de problemas relativos a la medicina, biología, fisiología, bioquímica, farmacocinética y la genética; campos en los que las matemáticas son utilizadas como instrumentos para la descripción, explicación y predicción de fenómenos de tales sectores. Por ejemplo, algunas ciencias biomédicas en las que se pueden emplear modelos matemáticos para su investigación son:

- Biología celular
- Biología del desarrollo
- Biología molecular
- Bioquímica, biofísica y biología estructural
- Ciencias de las plantas
- Ecología y biología evolutivas
- Farmacología, toxicología y salud ambiental
- Fisiología
- Genética, genómica y bioinformática
- Ingeniería y ciencias de los alimentos
- Inmunología y enfermedades infecciosas
- Microbiología
- Neurociencia y neurobiología

Estructura del ADN.

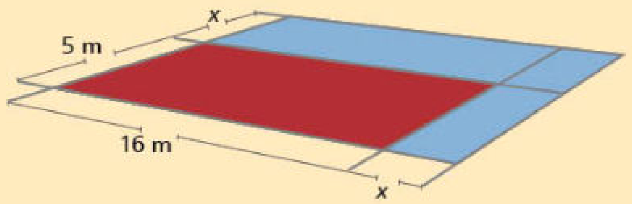
Los modelos matemáticos también se emplean en las ciencias biomédicas; por ejemplo, en una tomografía del cerebro.

Actividad

1. En grupo y con el apoyo de su profesor, comenten los siguientes aspectos:
   a) ¿Has escuchado hablar sobre alguna ciencia biomédica?
   b) En este bloque, ¿qué situaciones han modelado?
   c) ¿Qué es un modelo matemático?
   d) ¿Qué tipos de modelos matemáticos conocen?
   e) ¿En qué situaciones han modelado?
2. Después de hacer todos sus comentarios, traten de sacar conclusiones acerca de las ventajas de modelar matemáticamente distintos fenómenos.
3. Comenta con tus compañeros qué conocimientos matemáticos te permitieron comprender los modelos que ahí se usan.

Patios

El patio de una casa que originalmente tenía las dimensiones que se indican en el siguiente dibujo, se amplió agregando un mismo número de metros por lado, de tal forma que ahora el área ha aumentado 72 m² más. ¿Cuáles son las dimensiones del patio ampliado?



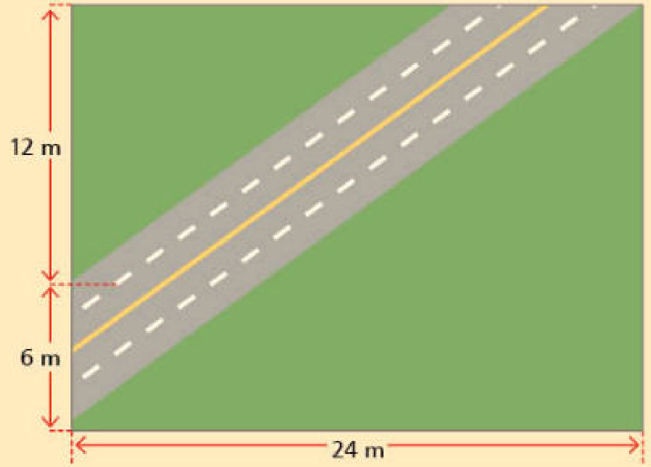
1. Escribe la ecuación que modele el problema. ______________________

2. Resuelve la ecuación por el método que consideres conveniente. Anota tus operaciones.

3. Determina las dimensiones que tiene el patio ampliado y calcula los metros cuadrados que tiene. Registra tus operaciones.

Carreteras y caminos

Por la construcción de una carretera, un terreno de cultivo de forma rectangular pierde parte de su superficie como se muestra a continuación:



Para el pago de indemnización al dueño del terreno, es necesario calcular el número de metros cuadrados ocupados por la carretera.

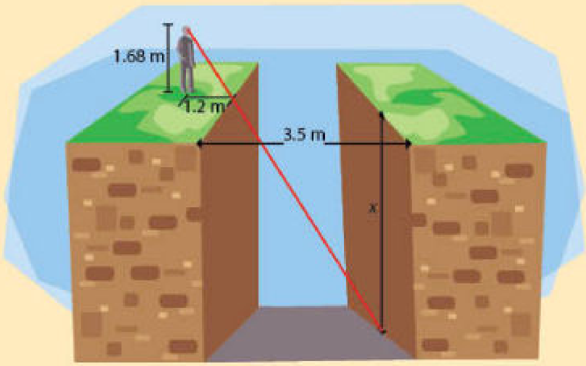
1. ¿Cuántos metros cuadrados ocupa la carretera? Anota tus operaciones.

2. ¿Cuántos metros cuadrados quedan de terreno para cultivo? Escribe tus operaciones.

3. ¿Cuánto mide la longitud mayor de la carretera? Anota tus operaciones.

Obras

Un ingeniero desea calcular la profundidad de una zanja. Para ello, observa el borde y en esa misma posición puede ver el fondo de la pared opuesta como se muestra en la imagen.

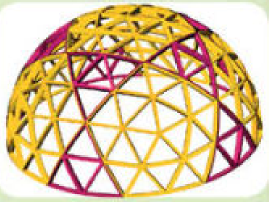


1. ¿Qué profundidad (x) tiene la zanja? Registra tus operaciones.

2. ¿Cuál es la distancia que representa el segmento de color rojo? Registra tus operaciones.

BLOQUE 4

Sentido numérico y pensamiento algebraico



Forma, espacio y medida

Manejo de la información

Aprendizajes esperados

Al finalizar este bloque podrás:

- Utilizar en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resolver problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcular y explicar el significado del rango y la desviación media.

Introducción

Ahora, continuarás con el desarrollo de tu pensamiento lógico matemático al resolver diversos problemas de sucesiones conocidos como números triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etcétera.

También conocerás cuáles son los cuerpos geométricos que se denominan como cuerpos de revolución. Aprenderás la forma en que estos se pueden generar a partir de figuras planas y la manera en que se construyen.

Por otra parte, descubrirás las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente. De igual forma, analizarás las relaciones que existen entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

Además, estudiarás la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal, como la devaluación de un automóvil, el incremento de precios, el grado de acidez de la lluvia, entre otros casos.

Por último, averiguarás cómo medir la dispersión de un conjunto de datos para tener información adicional en diferentes contextos, como en la medición de la presión arterial, el atletismo, los precios de un mismo producto, entre otros.

¡Planteamiento del acertijo!

Áreas de distintas figuras

- En la siguiente figura, el cuadrado A tiene un área de 144 cm², el cuadrado B tiene un área de 81 cm² y el triángulo C tiene un área de 102 cm². ¿Cómo obtendrías el área de E?
- Proporciona argumentos que validen tus respuestas y compáralos con los de tus compañeros.

PROYECTO 4

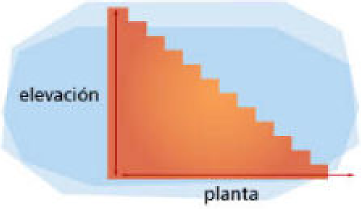
Construyendo escaleras

En este proyecto explorarás uno de los temas que se abordan en el bloque, relacionado con la pendiente de una recta.

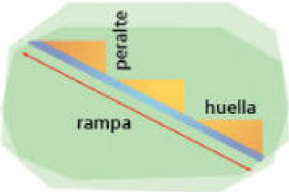
En las escaleras, los bordes de los escalones son, generalmente, rectas perpendiculares y para hacer el diseño de ellas se necesita aplicar rectas paralelas.

Lo que necesitas:
- Tijeras de punta redonda
- Una cartulina
- Juego de geometría
- Un lápiz

En algunos planos arquitectónicos se representan escaleras como en la siguiente figura:



¿Cómo hacen los arquitectos para determinar la altura (peralte) y el ancho (huella) de los escalones?

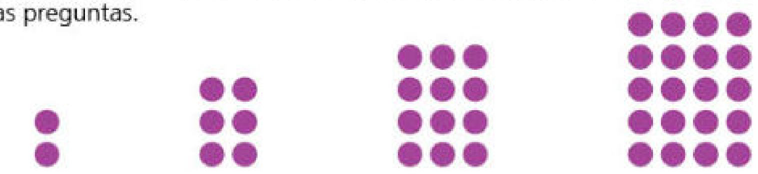


1. Utiliza el material para construir, a escala, una escalera recta de 3 metros de planta y 2 metros de elevación. Escribe en tu cuaderno las respuestas a las siguientes preguntas, así como las medidas de los escalones (huella y peralte) y cuida que se pueda subir cómodamente por ella.
   a) ¿En cuántas partes quedó dividida la planta? ¿Son iguales entre sí estas partes?
   b) ¿En cuántas partes quedó dividida la elevación? ¿Son iguales entre sí estas partes?
   c) ¿En cuántas partes quedó dividida la rampa? ¿Son iguales entre sí estas partes?
   d) ¿Cuántos escalones tiene tu escalera?
   e) ¿Cuánto mide el peralte de cada escalón? ¿Cuánto mide la huella?
   f) ¿Tu escalera es cómoda de subir? Justifica tu respuesta.
2. En una escalera con 25 escalones iguales, la elevación mide 2.5 m y la planta mide 3 m, contesta en tu cuaderno.
   a) ¿Cuánto mide el peralte de cada escalón? ¿Cuánto mide la huella?
   b) ¿Es cómoda esta escalera? Justifica tu respuesta.
3. Escribe en tu cuaderno tus respuestas para cada una de estas preguntas mediante una expresión algebraica.
   a) Si conoces la elevación (e) y el número de escalones (n), ¿cómo determinas el peralte (p)?
   b) Si conoces el peralte y el número de escalones, ¿cómo determinas la elevación?
   c) Si conoces el peralte y la elevación, ¿cómo determinas el número de escalones?
4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros e identifiquen las dificultades a las que se enfrentaron, mismas que podrán analizar con el estudio de las lecciones 23, 24 y 25.

Sucesiones cuadráticas

En ocasiones resulta útil conocer una regla general para la solución de problemas. Las sucesiones, sean numéricas o figurativas, permiten a quien las resuelve conjugar tanto las matemáticas como la habilidad para generalizar.

1. Analiza la siguiente sucesión de figuras formadas por círculos y contesta las preguntas.



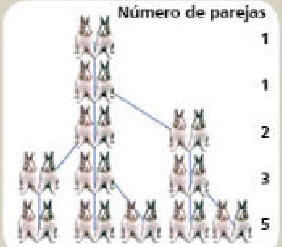
   a) ¿Cómo va aumentando la cantidad de círculos en la base de cada una de las figuras anteriores? _____
   b) ¿Cuántos círculos habrá en la base de la quinta figura de la sucesión?, ¿y de la sexta? _____
   c) ¿Cuántos círculos de altura tendrá la quinta figura de la sucesión?, ¿y la sexta? _____
   d) ¿Qué relación observas entre el número de círculos tanto de la base como de la altura en cada figura? _____
   e) ¿Cuántos círculos habrá en la base de la figura 10?, ¿y en la altura? _____
   f) ¿Cuántos círculos habrá en la base de la figura que se halla en la posición n de la sucesión?, ¿y en la altura? _____
   g) Si el número de círculos en la base de una figura de la sucesión es n y la altura es $n + 1$, ¿cuál es la expresión algebraica que representa el número de círculos de una figura de la sucesión? _____
2. Compara tus respuestas con las de otro compañero. Comenten cómo fue que llegaron a esas respuestas. Luego, discutan lo siguiente: ¿Qué relación existe entre el resultado de elevar al cuadrado el número de la posición que ocupa cada figura y sumar el mismo número de la posición, con la cantidad de círculos de cada figura? Por ejemplo, para la figura 3, el número de posición es 3, así que su número de posición al cuadrado (3^2) más el mismo número de posición (3), resulta 12; es decir, $3^2 + 3 = 12$.

Programa

Eje: *Sentido numérico y pensamiento algebraico*
Tema: *Patrones y ecuaciones*
Contenido: *Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.*

Al margen

En matemáticas se conoce como *sucesión de Fibonacci* a la sucesión de números en la que cada término es igual a la suma de los dos precedentes: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21… Fue descubierta por el matemático italiano Leonardo Fibonacci en algunas estructuras naturales, como el nacimiento de los conejos.



El número de parejas coincide con los términos de la sucesión.

Una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil. A partir de ese momento engendra una pareja de conejos, que a su vez, tras ser fértiles, engendrarán cada mes una pareja de conejos. Si conoces el número de parejas de conejos en este mes y el mes pasado, ¿cuántas parejas habrá en el próximo mes?

Sucesión númerica es un conjunto ordenado de números que pueden prolongarse de forma infinita. A cada elemento de una sucesión se le denomina término.

1. Reúnete con un compañero y dibujen la figura 5 de cada sucesión:

Números triangulares

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

Números cuadrados

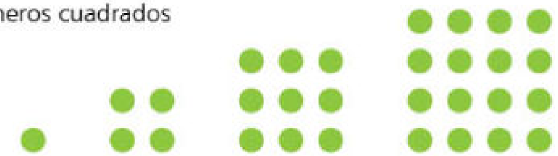


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

Números rectangulares

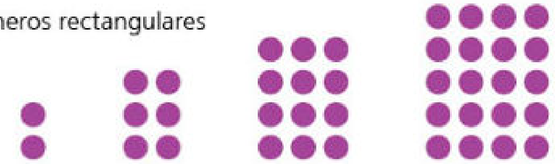


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

2. A partir de las sucesiones de figuras anteriores, completen la siguiente tabla escribiendo la sucesión de números que se generan en cada caso.

Orden (n)	Triangulares	Cuadrados	Rectangulares
1			
2			
3			
4			
5			

3. Analicen las cuatro columnas de números y escriban las relaciones que encuentran entre los números. ____________________

4. Reúnanse con otra pareja de compañeros, comparen las relaciones que hayan encontrado y escriban una expresión algebraica que represente la regla general de cada una de las sucesiones. ________________

5. En forma grupal, y con la orientación de su profesor, comparen sus expresiones algebraicas. Verifiquen que se cumplen para cada sucesión; para ello, sustituyan en cada fórmula general el número de la posición de cada figura, luego realicen en su cuaderno las operaciones.

6. Discutan si las siguientes afirmaciones son correctas. Argumenten sus respuestas: Un número cuadrado es el cuadrado del número de orden; un

número rectangular es el doble de un número triangular; al sumar un número cuadrado con su respectivo número de orden, resulta un número rectangular.

1. Formen equipos de tres integrantes. Analicen los siguientes números pentagonales y completen la tabla. Luego, busquen relaciones entre los distintos tipos de números.

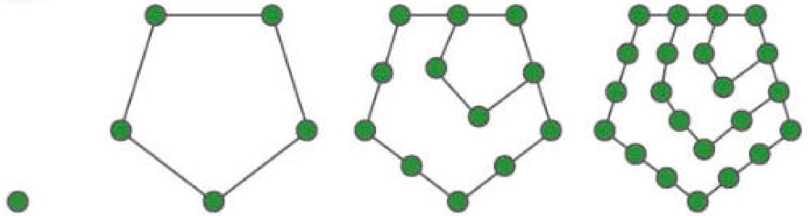
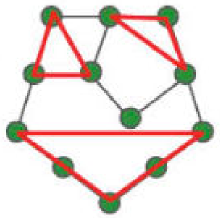


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Orden (n)	Triangulares	Cuadrados	Rectangulares	Pentagonales
1				
2				
3				
4				
5				

a) Argumenten si la siguiente afirmación se cumple: Un número pentagonal es igual a un número cuadrado más un número triangular menos 1.

b) Un alumno afirma que un número pentagonal es igual a un número triangular más dos veces un número triangular de un orden inferior. Justifiquen si es correcta esta afirmación.



c) Investiguen si se cumple esta afirmación en el pentágono de orden 4. Unan los puntos y busquen los tres triángulos.

d) Si la fórmula general de una sucesión de números triangulares es $\frac{n^2+n}{2}$, ¿cuál es la expresión algebraica que relaciona la siguiente expresión: Un número triangular más dos veces un número triangular de un orden inferior?

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en buscar relaciones entre los distintos tipos de sucesiones?
2. ¿Verificó con otros equipos sus respuestas y procedimientos y los argumentó?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de otros compañeros?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su compañero, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

e) ¿Qué representa la expresión $2\left[\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}\right]$? ______________

____

f) ¿Cuál es la fórmula general de una sucesión de números pentagonales?

____

2. Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Muestren las operaciones algebraicas que realizaron para llegar a la fórmula general. Luego, con la guía de su maestro verifiquen si la fórmula $\frac{3n^2-n}{2}$ corresponde a la regla general de una sucesión de números pentagonales.

Lean detenidamente la siguiente información y luego lleven a cabo lo que se indica:

- Una forma para saber si una sucesión es lineal o cuadrática, es determinar las diferencias entre los términos de la sucesión hasta que dicha diferencia sea constante. Por ejemplo:

	Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4	Posición 5
Término de la sucesión	2	6	12	20	30
Primera diferencia	6 − 2 = 4	12 − 6 = 6	20 − 12 = 8	30 − 20 = 10	
Segunda diferencia	6 − 4 = 2	8 − 6 = 2	10 − 8 = 2		

La diferencia es 2 en todos los casos

Como la diferencia constante se obtuvo hasta la segunda diferencia, entonces, la expresión algebraica que representará al término enésimo es de segundo grado, de la forma $an^2 + bn + c$.

- Una forma de determinar los valores de a, b y c es resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$a + b + c$ = primer término de la sucesión

$3a + b$ = primer término de las primeras diferencias

$2a$ = término constante de la segunda diferencia

- Por ejemplo, para encontrar la fórmula general de la sucesión anterior, se establecen las siguientes ecuaciones.

$$a + b + c = 2$$
$$3a + b = 4$$
$$2a = 2$$

1. Resuelvan el sistema de ecuaciones y determinen los valores a, b y c.

2. Sustituyan en la expresión $an^2 + bn + c$.

3. Comparen la fórmula anterior con la que determinaron para los números rectangulares.

¡A investigar!

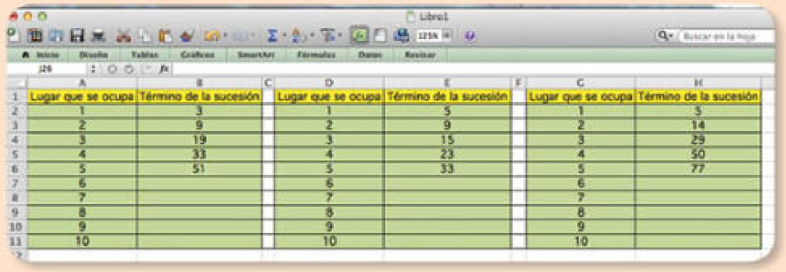
Investiga en libros de texto o en internet los números figurados. Te proponemos la página web siguiente: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/41001513/helvia/sitio/upload/01_Problemas_de_Progresiones.pdf (consulta: 13 de enero de 2017).

Comparte con tu grupo los resultados de tu investigación.

Tecnología

En una hoja electrónica de cálculo puedes obtener los términos que desees de una sucesión numérica, si conoces la regla que la rige.

1. Construye en una hoja de cálculo las siguientes tablas. Para cada una obtén la expresión algebraica que permite conocer el término enésimo de la sucesión.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Lugar que se ocupa	Término de la sucesión		Lugar que se ocupa	Término de la sucesión		Lugar que se ocupa	Término de la sucesión
2	1	3		1	5		1	5
3	2	9		2	9		2	14
4	3	19		3	15		3	29
5	4	33		4	23		4	50
6	5	51		5	33		5	77
7	6			6			6	
8	7			7			7	
9	8			8			8	
10	9			9			9	
11	10			10			10	

a) Introduce en las celdas B2, E2 y H2, la fórmula que permite encontrar los términos de la sucesión y verifica que se cumplan en cada caso.

b) Obtén los términos 6, 7, 8, 9, 10 y 11 de cada sucesión.

c) Utiliza tu hoja electrónica de cálculo para obtener, de cada sucesión, el número que ocupa el lugar 100.

2. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Comenta con ellos cuáles fueron las fórmulas que escribieron en las celdas B2, E2 y H2.

Resuelve los siguientes problemas.

1. A partir de la siguiente sucesión responde lo que se te pregunta.

2, 5, 10, 17, 26 …

a) ¿Cuál es el siguiente término de la sucesión?, ¿por qué? ______________

____

b) ¿Qué relación hay entre un término y el que le sigue en la sucesión?

____

c) ¿Cuál es el noveno término de la sucesión?, ¿y el décimo? ______________

____

d) Si elevas al cuadrado el número de la posición que ocupa cada término, ¿qué regularidad observas? ______________

e) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el término enésimo de la sucesión? ______

2. Analiza la sucesión de figuras que se muestra a continuación. A partir de ella, contesta lo que se pide.

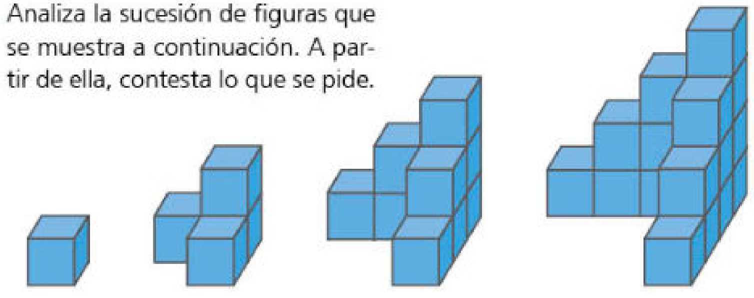


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) ¿Cuántas caras visibles tendrá la figura 6 de la sucesión? ______

b) Completa las operaciones del siguiente esquema, donde se analiza el número de caras que es posible ver en los cubos de cada figura y las diferencias que se obtienen de ellas. ¿En cuál de las diferencias se obtiene un valor constante? ______

	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5
Caras que se ven	3	9	17	27	39
Primera diferencia	9 − 3 = 6	17 − 9 = 8	27 − 17 =	=	
Segunda diferencia	8 − 6 = 2	10 − 8 =	12 − 10 =		

c) ¿Cuántas caras sería posible ver en la figura que ocupe el lugar 30?, ¿y en la que ocupe el lugar 50? ______

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el total de caras que es posible ver en cualquier figura de la sucesión? ______

3. En la siguiente tabla se muestra una sucesión numérica, así como el lugar que ocupa cada término.

Número de posición del término	1	2	3	4	5	6	...
Sucesión	4	7	12	19	28	39	...

a) ¿Cuánto aumenta el segundo término respecto al primero? ¿Y el tercero respecto al segundo? ______

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite obtener cualquier número que forma parte de la sucesión? ______

4. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. En los casos donde no coincidan, justifícalas o pregunta a tus compañeros cómo fue que llegaron a esa respuesta. En caso de duda, pide el apoyo de tu profesor y con todo el grupo discútelas.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Reconozco las características de sucesiones cuadráticas.			
Establezco relaciones entre la medida de la base y el número de posición de una figura en una sucesión para determinar regularidades.			
Identifico relaciones entre el número de la posición y el elemento mismo para establecer la fórmula general del enésimo término de la sucesión.			
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades? ¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño? ¿Qué actitudes asumí para desarrollar el hábito del pensamiento racional? Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:			

Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

Sólidos de revolución

Los edificios, casas, muebles, que vemos a nuestro alrededor, regularmente se presentan en forma de poliedros. También vemos otros objetos, por ejemplo: botes de agua, un barquillo de helado, una pelota, entre otros.

1. Consigue el siguiente material: tres palos de madera de 40 cm de largo lo más delgados posible, pegamento líquido, cartón de aproximadamente 50 cm por 50 cm, una hoja de papel, tijeras y un juego de geometría.

2. En el cartón traza y recorta un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 10 cm y 15 cm; un rectángulo cuyos lados midan 20 cm por 15 cm, y un semicírculo de 8 cm de radio.

3. Coloca cada figura de cartón como se muestra a continuación, de tal manera que cada una pueda girar con el palo de madera.

Con base en el experimento que hiciste, contesta:

a) Al hacer girar el triángulo, ¿qué cuerpo geométrico se genera? ______

b) Si quisieras modificar la altura del cuerpo geométrico generado, ¿qué cambiarías en el triángulo? ______

c) Al hacer girar el rectángulo, ¿qué cuerpo geométrico se genera? ______

d) Si quisieras modificar el ancho del cuerpo geométrico formado, ¿qué cambiarías en el rectángulo? ______

e) Al hacer girar el semicírculo, ¿qué cuerpo geométrico se genera? ______

f) Si quisieras modificar el tamaño del cuerpo geométrico generado, ¿qué cambiarías en el semicírculo? ______

g) Comenta y argumenta tus respuestas con tus compañeros.

Programa

Eje: *Forma, espacio y medida*
Tema: *Figuras y cuerpos*
Contenido: *Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.*

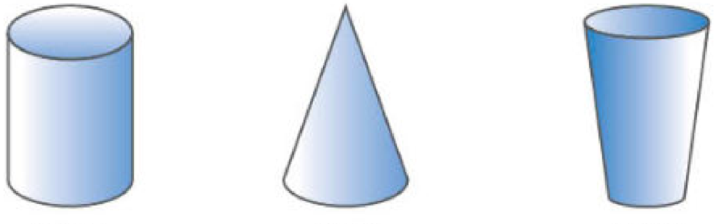
Semicírculo es cada una de las dos mitades del círculo separadas por el diámetro.

Al margen

En diversos objetos, como una pelota que parece una esfera, el dado que parece un cubo o una lata que parece un cilindro, podemos observar que algunos de ellos podrían rodar pero otros no. ¿Qué otros objetos conoces que puedan rodar?

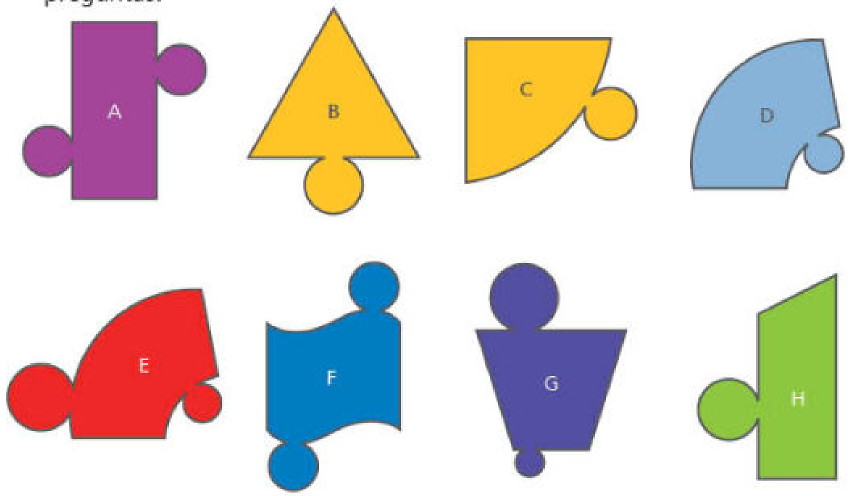
Un hipérbole es un sólido que también puede rodar.

1. Formen equipos de tres integrantes. Los siguientes cuerpos geométricos están construidos con papel. Obsérvenlos y tracen en su cuaderno cada uno de ellos, tal y como se verían desarmados.



Desarrollo plano es la figura plana que se obtiene al extender la superficie de un sólido sobre el plano.

2. Observen los desarrollos planos A, B, C, D, E, F, G, H y contesten las preguntas.



a) ¿Con cuáles de los desarrollos planos, al ser armados, se forma un cuerpo similar al de la figura 1 de la actividad anterior? ____________

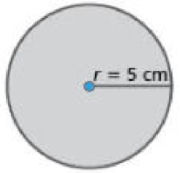
b) ¿Con cuáles, un cuerpo similar al de la figura 2? ____________

c) ¿Con cuáles, un cuerpo similar al de la figura 3? ____________

d) ¿Con cuáles desarrollos planos no se puede armar ningún cuerpo similar a los de las figuras 1, 2 y 3 de la actividad anterior? Justifiquen su respuesta. ____________

1. Ángel elaborará paquetes de juguetes miniatura en cilindros que construirá con hojas de cartón y tapaderas de metal. Escribe las dimensiones de las tapas y la medida de la base de las etiquetas que utilizará para cubrir la cara curva del cilindro.

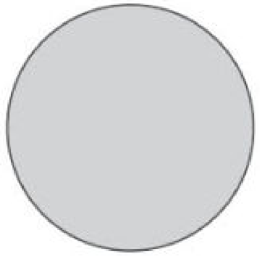
Modelo A



Altura: 6.5 cm

Circunferencia: ________ Base: ________ cm

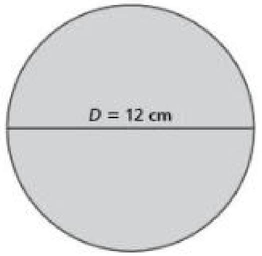
Modelo B



Altura: 8 cm

Circunferencia: 12.6 cm
Radio: ________ Base: ________ cm

Modelo C



Altura: 14 cm

Circunferencia: ________ Base: ________ cm

2. Escriban las dimensiones de las bases circulares del cilindro en caso de que Ángel coloque las etiquetas de manera vertical.

Modelo	Radio de la circunferencia	Circunferencia
Modelo A		
Modelo B		
Modelo C		

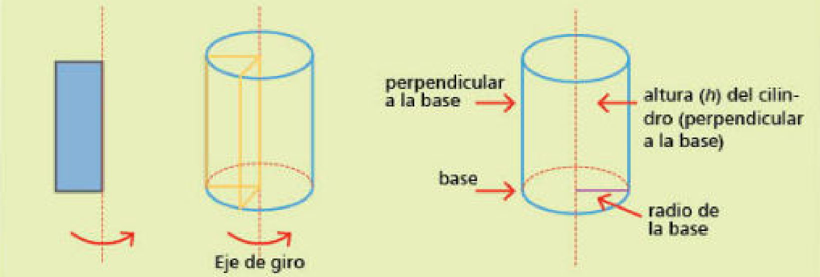
3. Comparen los resultados y validen sus procedimientos. Justifiquen sus respuestas ante el grupo.

- Los cuerpos de revolución más comunes son el cilindro, el cono y la esfera. El cilindro es el cuerpo que se genera por la rotación de un rectángulo con respecto a alguno de sus lados como se ilustra a continuación.

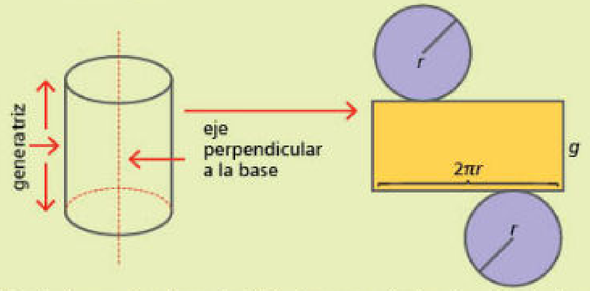
Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en el análisis de los desarrollos planos en la sección "En equipo", actividad 1?
2. En la actividad "En parejas", ¿participó en el cálculo de las dimensiones del círculo y de la cara lateral de los recipientes cilíndricos? ¿Comparó con otros equipos sus respuestas?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros en la discusión acerca de los procedimientos que utilizaron?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su pareja, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.



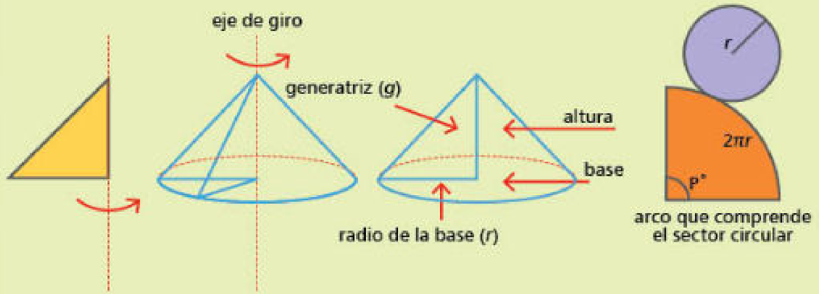
- Por el desplazamiento de un círculo a través de un eje perpendicular (altura) a la base.



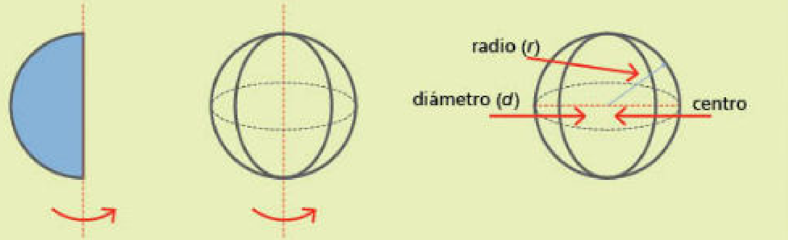
En el desarrollo plano del cilindro recto, la longitud de la base es igual a la longitud de la cara lateral, y la generatriz mide lo mismo que la altura.

La *generatriz* es una línea que a causa de su movimiento conforma una figura geométrica, que a su vez depende de la directriz. La generatriz puede ser una línea recta o curva. Si la generatriz es una línea recta que gira respecto a otra recta directriz, llamada eje de rotación, conformará una superficie cónica, cilíndrica, etcétera. Si la generatriz es una curva, genera esferas, elipsoides y otros cuerpos similares.

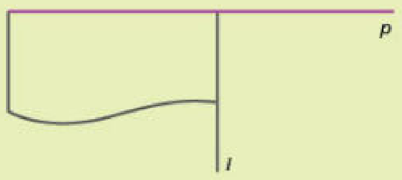
- El cono es el cuerpo de revolución que se genera por la rotación de un triángulo rectángulo respecto alguno de sus catetos, como se ilustra a continuación.



- Si se conoce la medida del radio de la base y la generatriz, se puede calcular la abertura del arco de la superficie lateral con la siguiente fórmula: $p = \frac{360\ (r)}{g}$. El área del sector circular es igual a: $A_{sc} = \pi g r$.
- La esfera es el cuerpo de revolución que se genera por la rotación de un semicírculo respecto a su diámetro, como se ilustra.

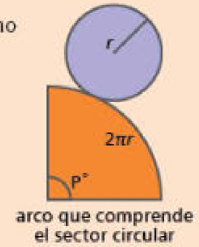


Desde este mismo tipo de rotación de una superficie plana alrededor de un eje, ¿qué otro tipo de sólidos podrías generar? Por ejemplo, haz el experimento mental de rotar una superficie como la siguiente: alrededor de los ejes *l* o *p*.

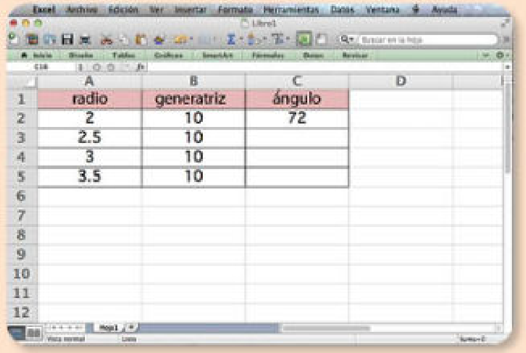


Tecnología

Se tiene el desarrollo plano de un cono como el que se muestra.



1. Con ayuda de una hoja de cálculo analizarás la relación que existe entre la generatriz (g) de un cono y la abertura del arco de la superficie lateral ($p°$).



	A	B	C	D
1	radio	generatriz	ángulo	
2	2	10	72	
3	2.5	10		
4	3	10		
5	3.5	10		
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

2. Utiliza una hoja de cálculo para obtener la abertura del arco de la superficie lateral con la fórmula:

$$p° = \frac{360\ (r)}{g}$$

a) ¿Cuál es la fórmula que debes anotar en la celda C2 para conocer la medida del arco de la superficie lateral? ____________________

b) ¿Qué sucede si el radio y la generatriz tienen la misma medida? ____________________

Tecnología

c) Si el radio de la base del cono crece y se mantiene la generatriz constante, ¿qué sucede con la medida del ángulo ($p°$)? ______

d) Si el radio se mantiene constante y la generatriz crece, ¿qué sucede con el ángulo? ______

¡A investigar!

Investiga en un libro de Geometría o en internet lo siguiente:

- ¿Cuáles son las características de un cono oblicuo?
- ¿Cuáles son las características de un cilindro oblicuo?
- ¿Qué similitudes y diferencias tiene un cono oblicuo respecto a un cono recto?

Comenta y argumenta tus respuestas con tus compañeros.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Identifico las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo.			
Calculo el área total del desarrollo plano de un cono y de un cilindro recto.			
Construyo desarrollos planos de conos y cilindros rectos.			
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades? ¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño? ¿Qué actitudes asumí para desarrollar el hábito del pensamiento racional?			

Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

Por tu cuenta

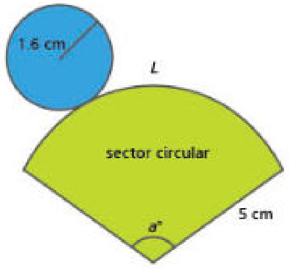
1. Obtén el valor de los datos faltantes en el siguiente desarrollo plano de un cono y contesta:

a) ¿Cuál es la medida del ángulo del sector circular ($a°$)? ______

b) ¿Cuál es la longitud del arco del sector circular (L)? ______

c) ¿Cuál es el área total del cono, incluidas tanto su base como el sector circular? ______

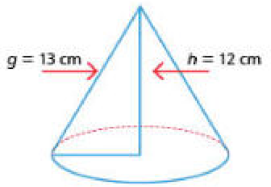
d) ¿Cuál es la altura del cono? ______



2. Traza en tu cuaderno el desarrollo plano del siguiente cono y contesta.

a) ¿Cuánto mide el radio de la base del cono? ______

b) ¿Cuál debe ser la medida del ángulo y la longitud del arco del sector circular? ______

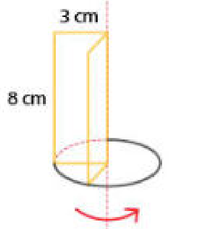


3. Se genera un cilindro al girar un rectángulo respecto de un eje como se muestra en la figura.

a) ¿Cuánto mide el radio de la base del cilindro? ______

b) ¿Cuánto tiene de altura el cilindro? ______

c) Comenta y argumenta tus respuestas con tus compañeros.

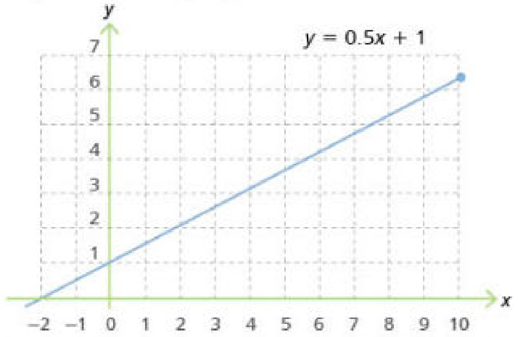


Valor de la pendiente de una recta y del ángulo que se forma con la abscisa

Piensa y comenta

Individual

1. Analiza la siguiente gráfica de la recta $y = 0.5x + 1$ y a partir de ello, contesta las preguntas.



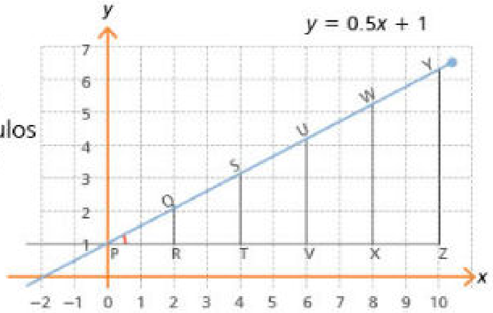
a) ¿Cuál es el valor de la ordenada al origen? ¿Qué relación tiene este valor con la gráfica? Justifica tus respuestas. ______

b) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta? ¿Qué relación tiene el valor de la pendiente con el ángulo de inclinación de la recta? Justifica tus respuestas. ______

c) ¿Cuál es el valor del ángulo que se forma al cortarse la recta con el eje de las abscisas? Describe cómo obtuviste tu respuesta. ______

2. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y compartan las estrategias utilizadas.

3. En la gráfica anterior se han construido diferentes triángulos rectángulos quedando de la siguiente manera.



a) ¿Cuáles son los distintos triángulos que se construyeron? ______

Programa

Eje: *Forma, espacio y medida*
Tema: *Medida*
Contenido: *Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.*

Al margen

Aristarco de Samos (310-230 a. n. e.), célebre astrónomo de Alejandría, estudió las distancias entre el Sol y la Tierra y entre ésta y la Luna. Cuando se observa la Luna en cuarto creciente, las líneas Tierra-Luna y Luna-Sol forman un ángulo de 90°. Aristarco midió el ángulo que formaba la Tierra con la Luna y el Sol, estimando su valor en 87°.

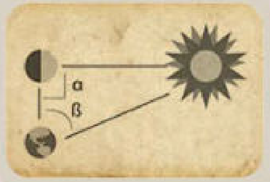


Diagrama de Aristarco sobre la proporción entre las distancias de la Tierra al Sol y a la Luna.

De acuerdo con Aristarco de Samos, la Tierra se encuentra unas 18 veces más distante del Sol que de la Luna. ¿Fueron precisas las estimaciones que realizó Aristarco?

b) En cada uno de los triángulos rectángulos obtén el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente al ángulo *P*. ¿Qué relación se da entre cada uno de los cocientes? ¿Qué relación se da entre estos cocientes y la pendiente de la recta? ______

______

Pendiente es la inclinación de una recta con respecto al eje de las abscisas.

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y verifiquen si al construir cualquier otro triángulo bajo las condiciones anteriores, se mantiene el mismo cociente.

¡A investigar!

Para obtener el valor del ángulo que se forma con la recta y el eje de las abscisas te puedes apoyar en una tabla de funciones trigonométricas, en donde relacionarás el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente, con la tangente del ángulo.

Ingresa a la dirección electrónica http://www.sectormatematica.cl/proyectos/tabla.htm (Consulta: 13 de enero de 2017) y, con la ayuda de tu profesor, obtén el valor del ángulo cuya tangente es 0.5.

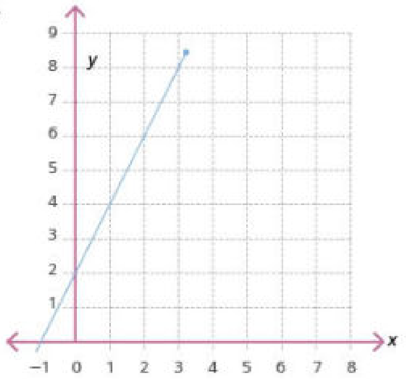
- Apóyate en la tabla de funciones trigonométricas para validar el valor de los ángulos que deberás obtener a lo largo de la lección.

Analiza con tus compañeros las dificultades a las que se enfrentaron para obtener los valores de los ángulos y comenten sobre la posibilidad de usar una calculadora científica.

En equipo

Reúnanse en equipo de cuatro integrantes y realicen las actividades que se les plantean.

1. A partir del análisis de la siguiente gráfica, contesten las preguntas.



a) ¿Cuál es el valor del ángulo que se forma con la recta y el eje de las abscisas? Describan cómo obtuvieron el valor del ángulo. ______

______

b) Construyan diferentes triángulos rectángulos cuya hipotenusa se encuentre sobre la recta y los catetos sean paralelos a los ejes. En cada uno de los triángulos dividan el cateto opuesto entre el cateto adyacente. ¿Qué relación observan entre los cocientes obtenidos? ______

______

c) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta? ¿Cuál es la ecuación de la recta? Argumenten sus respuestas. ______

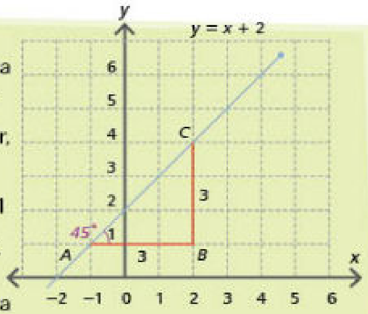
______

d) Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, junto con su profesor, validen los argumentos que proporcionaron.

Para avanzar

En la gráfica que corresponde a la recta $y = x + 2$, se observa que:

- La pendiente de la recta es 1; es decir, $m = 1$.
- En el triángulo *CAB*, $= \frac{CB}{CA} = \frac{3}{3} = 1$
- El ángulo cuya *tangente* es 1 vale 45°.



1. Obtén las mismas relaciones para la recta $y = -x + 6$ y compara con tus compañeros los resultados obtenidos.

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas, explicando por qué piensan así:

1. ¿Identificó el valor de la pendiente de una recta?
2. ¿Obtuvo el valor del ángulo que se forma con la recta y la abscisa, así como el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente? ¿Analizó la relación entre ellos?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros?
4. ¿Qué aspectos de su participación deben mejorar?

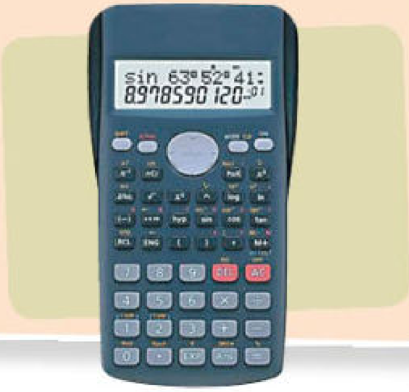
Tecnología

Con la calculadora científica puedes obtener el valor de un ángulo a partir del valor de la tangente.

- Ejemplo: si la *tangente* de cierto ángulo fuera 1, entonces, el valor de dicho ángulo se obtiene al oprimir una secuencia de teclas como las que se muestran, dependiendo del modelo de calculadora:

2ndF tan 1 = 45   1 2ndF tan = 45

- Esto quiere decir que el ángulo cuya tangente es igual a 1 mide 45°. En algunas calculadoras, la tecla 2ndF puede aparecer como INV o Shift.



Tecnología

1. Explora tu calculadora científica y obtén el valor de cada ángulo a partir de los siguientes valores de la tangente.

a) Tan 0.7 = ____________ d) Tan 1.28 = ____________

b) Tan 0.9 = ____________ e) Tan 1.6 = ____________

c) Tan 0.51 = ____________ f) Tan 14.3 = ____________

2. Parte del valor de los siguientes ángulos y obtén el valor de la tangente.

a) Tangente de 60° = ________ d) Tangente de 15° = ________

b) Tangente de 75° = ________ e) Tangente de 80° = ________

c) Tangente de 30° = ________ f) Tangente de 50° = ________

3. Ahora, utiliza tu calculadora científica para validar el valor de los ángulos que obtuviste en las actividades de la lección.

Valoración personal

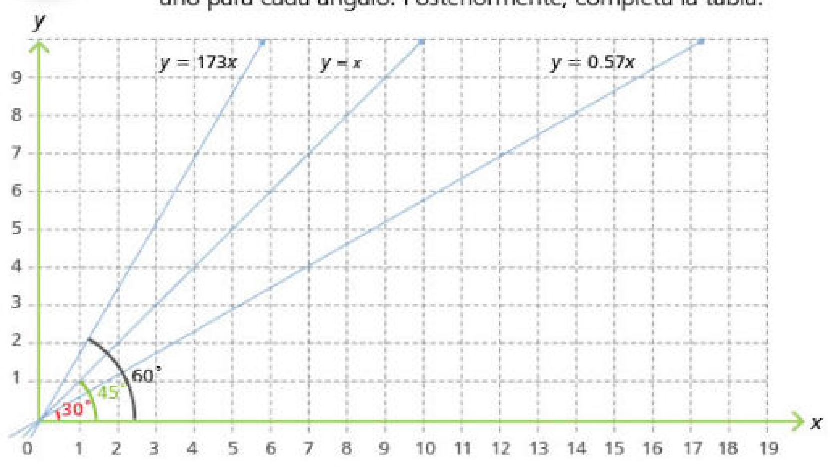
Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Identifico el valor de la pendiente a partir de la ecuación de la recta.			
Obtengo el valor de la pendiente a través del cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente.			
Analizo la relación entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.			

¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades?
¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño?
¿Cómo demostré disposición para el estudio de los contenidos de esta lección?
Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:

Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo

1. Se tienen las siguientes gráficas, que forman con el eje horizontal un ángulo de 30°, otro de 45° y uno más de 60°. A partir de los ángulos anteriores construye tres triángulos rectángulos, uno para cada ángulo. Posteriormente, completa la tabla.



Ángulo	Cateto opuesto (c.o.)	Cateto adyacente (c.a.)	Razón cociente (decimal)	Pendiente (m)
30°				
45°				
60°				

2. Compara con tus compañeros los resultados de la tabla y argumenten por qué coinciden las dos últimas columnas. Verifica si sucede lo mismo con otros ángulos. ____________

Análisis de las relaciones en un triángulo rectángulo

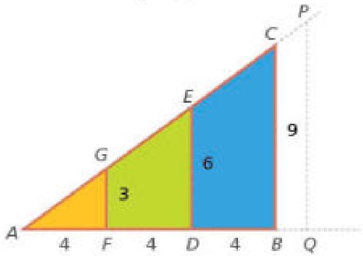
Programa

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Medida
Contenido: Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

El triángulo es una de las figuras geométricas más empleadas en la construcción de edificaciones, pues tiene la propiedad de mantener su forma al aplicarse sobre él una fuerza. Existen muchas estructuras que están formadas a base de triángulos unidos entre sí, por lo que es importante conocer las distintas relaciones que existen entre los elementos del triángulo rectángulo.

1. Analiza la siguiente figura y contesta las preguntas.

a) ¿Cuánto mide la hipotenusa en los triángulos rectángulos *ABC*, *ADE* y *AFG*? ____________



b) ¿Cómo son entre sí las medidas de los ángulos *AGF*, *AED* y *ACB*?, ¿por qué? ____________

c) Al dividir los lados *AF*, *AD* y *AB* entre las hipotenusas correspondientes de cada triángulo, ¿qué valores obtienes?, ¿qué observas entre estos valores? ____________

d) ¿Qué valores obtienes al dividir los lados *FG*, *DE* y *BC* entre las hipotenusas correspondientes de cada triángulo? ____________

e) Si prolongamos los lados *AB* y *AC* y trazamos una paralela a *BC* que corte las prolongaciones en *P* y *Q*, ¿cuál debe ser la medida de los ángulos *AQP* y *APQ*?, ¿por qué? ____________

f) ¿Cuál debe ser el cociente de dividir *AQ* entre *AP*? ¿Y *PQ* entre *AP*?, ¿por qué? ____________

2. Reúnete con un compañero y comparen sus respuestas, así como sus cálculos. Luego, con base en la figura, argumenten si es posible afirmar que en cualquier triángulo rectángulo que se construya de la misma forma que el *APQ* se pueden obtener los mismos cocientes al dividir la medida de sus catetos entre la medida de su hipotenusa.

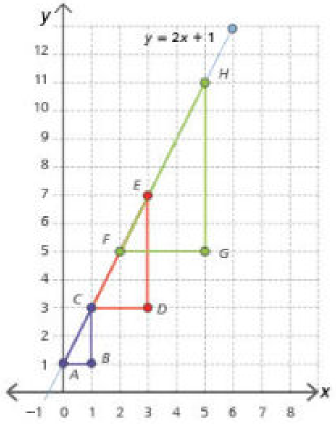
Al margen

El triángulo equilátero tiene sus tres lados congruentes y sus ángulos interiores de 60°. Un ejemplo de su uso en arquitectura son las pirámides de Gizah, en Egipto. Cada una de las cuatro caras triangulares que forman las pirámides son triángulos equiláteros, y su antigüedad y estado de conservación nos muestra la fortaleza de esta figura geométrica al aplicarse en las edificaciones.

Pirámides de Gizah, en Egipto.

Al trazar la altura de un triángulo equilátero, ¿qué clase de triángulos se forman? ¿Qué características tienen estos triángulos? Considera que la medida de lado de un triángulo equilátero es 1 u, ¿cuánto medirá de altura?

3. Reúnete con un compañero y a partir de la gráfica, respondan lo que se pregunta.



a) ¿Los tres triángulos son semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza entre los triángulos *ABC* y *CDE*? ¿Y entre los triángulos *ABC* y *FGH*?

b) ¿Cuánto mide la hipotenusa de cada triángulo?

ΔABC: hipotenusa = ________ ΔCDE: hipotenusa = ________

ΔFGH: hipotenusa = ________

4. Toma los datos necesarios de la gráfica y completa las siguientes tablas. Utiliza tu calculadora y considera hasta diezmilésimos en los cálculos y resultados. Luego, responde lo que se pregunta.

Triángulo *ABC*				
Medida del ángulo *CAB*	Medida del cateto opuesto al ángulo *CAB*	Medida del cateto adyacente al ángulo *CAB*	Razón seno del $\angle CAB$ $\left(\frac{\text{c. opuesto}}{\text{hipotenusa}}\right)$	Razón coseno del $\angle CAB$ $\left(\frac{\text{c. adyacente}}{\text{hipotenusa}}\right)$

Triángulo *CDE*				
Medida del ángulo *ECD*	Medida del cateto opuesto al ángulo *ECD*	Medida del cateto adyacente al ángulo *ECD*	Razón seno del $\angle ECD$ $\left(\frac{\text{c. opuesto}}{\text{hipotenusa}}\right)$	Razón coseno del $\angle ECD$ $\left(\frac{\text{c. adyacente}}{\text{hipotenusa}}\right)$

Triángulo *FGH*				
Medida del ángulo *HFG*	Medida del cateto opuesto al ángulo *HFG*	Medida del cateto adyacente al ángulo *HFG*	Razón seno del $\angle HFG$ $\left(\frac{\text{c. opuesto}}{\text{hipotenusa}}\right)$	Razón coseno del $\angle HFG$ $\left(\frac{\text{c. adyacente}}{\text{hipotenusa}}\right)$

a) ¿Cómo son entre sí las razones seno en los cuatro triángulos? ________

¿Y la razón coseno? ________ ¿A qué se debe esto? ________

b) Con una calculadora científica obtengan el seno y el coseno de los cocientes obtenidos. ¿Los resultados coinciden con la medida del ángulo *CAB*? ________ ¿Por qué? ________

5. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y escribe una conclusión considerando las siguientes afirmaciones: Todos los cocientes que resultan de dividir el cateto opuesto de un ángulo entre la hipotenusa son constantes. Este cociente constante sirve para obtener el valor del ángulo de la recta y a la inversa. Conociendo el valor del ángulo se puede obtener el valor del cociente constante. ________

Para avanzar

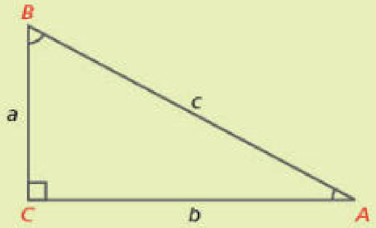
1. Reúnete con un compañero y analicen la siguiente información; luego, hagan lo que se pide.

A las razones que se establecen entre los lados de un triángulo rectángulo se les conoce como razones trigonométricas. Esto es, dado un triángulo rectángulo *ABC*:

- El lado *c* (hipotenusa) es el lado opuesto al ángulo recto, y los lados *a* y *b* son los catetos.

Respecto al ángulo *A*:
- El cateto opuesto es *a*.
- El cateto adyacente es *b*.

Respecto al ángulo *B*:
- El cateto opuesto es *b*.
- El cateto adyacente es *a*.



Las razones trigonométricas con respecto al ángulo *A* son las siguientes:

$$\text{sen}\,\angle A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \qquad \cos\,\angle A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\,\angle A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

a) Escriban las razones trigonométricas con respecto al ángulo *B* del triángulo *ABC*. ________

b) Si la medida de los lados del triángulo *ABC* son: $a = 5$ u, $b = 7$ *u* y $c = 8.6$ *u*, ¿cuáles son las razones trigonométricas con respeto al ángulo *A* y con respecto al ángulo *B*? Utilicen su calculadora y consideren hasta diezmilésimos en los resultados.

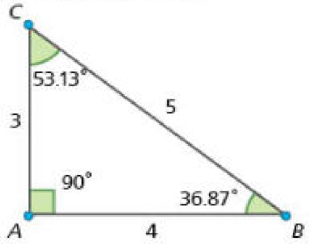
sen $\angle A$ = cos $\angle A$ = tan $\angle A$ =

sen $\angle B$ = cos $\angle B$ = tan $\angle B$ =

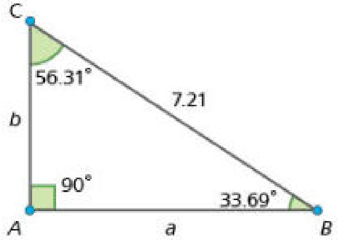
2. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y discutan lo siguiente: ¿El sen $\angle A$ = cos $\angle B$? ¿Por qué? ¿Qué otra conclusión pueden escribir? Compartan sus conclusiones con todo el grupo. ____________________

En equipo

1. Formen equipos de tres integrantes y realicen lo que se pide. En función del siguiente triángulo, determinen las razones trigonométricas que se indican:



sen 36.87° = ____ *cos* 36.87° = ____ *sen* 53.13° = ____ *cos* 53.13° = ____



2. Con la ayuda de una calculadora científica, determinen el valor de los catetos opuesto y adyacente al ángulo *B*; consideren el triángulo de la izquierda:

a = ____________

b = ____________

Para avanzar

1. Analicen la siguiente información y luego realicen lo que se pide.

- Con una calculadora científica se puede conocer el valor de las distintas razones trigonométricas de un ángulo o viceversa. Existen varios tipos de calculadoras, unas funcionan de la siguiente manera:

- Para conocer el valor del seno del ángulo 36.87°, las teclas que se deben oprimir son:

3 6 °‘” 8 7 °‘” Sin

Si se conoce el valor del seno (0.8660) y lo que se desea conocer es la medida del ángulo, las teclas que se deben oprimir son:

0 . 8 6 6 0 INV Sin^{-1}

- En algunas calculadoras, en lugar de la tecla INV, se usa la tecla Shift o 2ndF. También el orden puede ser distinto, es decir, primero se teclea la razón trigonométrica; luego la medida del ángulo o el valor.

a) Tecleen en su calculadora los dos casos que se mencionan en el texto anterior y averigüen qué resultados se obtienen.

b) Utilicen su calculadora y determinen el ángulo o la razón, según sea el caso.

sen (0.7071) = ____________
sen 30° = ____________

cos (0.3746) = ____________
cos 45° = ____________

tan (1.7320) = ____________
tan 45° = ____________

2. De forma grupal, pongan en común el resultado de sus respuestas. Si tienen dudas coméntelas y entre todos disípenlas; luego, contesten. ¿Cuántos elementos del triángulo rectángulo se pueden relacionar? ¿Si se conocen dos de esos elementos, es posible determinar los demás elementos? Escriban una conclusión al respecto.

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en dar argumentos válidos a las respuestas de los distintos cuestionamientos de los problemas?
2. ¿Verificó con otros equipos sus respuestas y procedimientos?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de otros compañeros?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su compañero, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

Tecnología

1. Ingresa a la siguiente dirección electrónica y explora la relación entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios. Para ello, desliza el punto que aparece en la parte superior izquierda. Considera que debes tener el programa *Geogebra* instalado en tu computadora.

http://www.geogebra.org/en/upload/files/dgmt/Unidad%203/Angulos Complementarios.html (Consulta: 13 de enero de 2017).

a) ¿Cuál es el valor de sen 30°? ¿Y el de cos 60°?

b) Si el Sen 60° es igual 0.8660, ¿cuál es el valor del cos 30°?

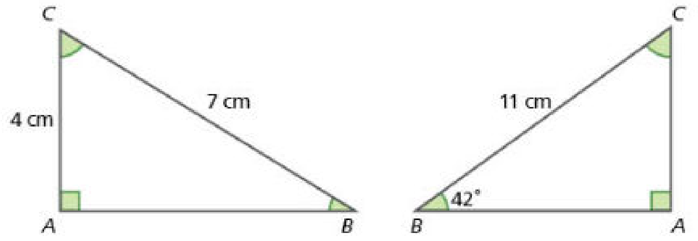
c) Comenta con tus compañeros la relación que descubriste al variar el ángulo α. Luego anótalo. ____________

¡A investigar!

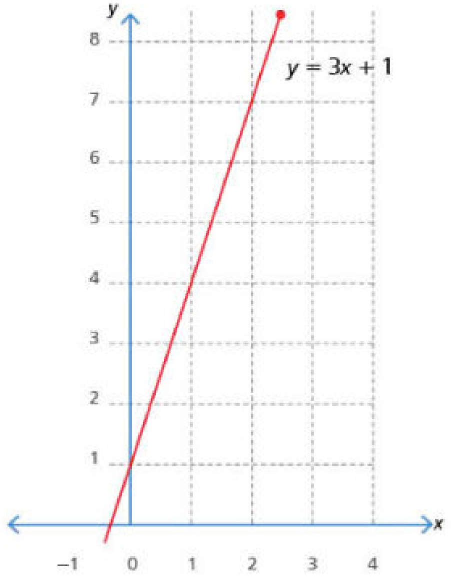
Investiga qué es un ángulo complementario. En la siguiente página de internet podrás encontrar información relevante al respecto. http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/angulos-complementarios.html (consulta: 23 de enero de 2017).

Comparte tu investigación con el grupo.

1. Utiliza tu calculadora científica y determina todas las medidas que faltan de cada uno de los siguientes triángulos.



2. Calcula el ángulo de inclinación de la siguiente recta.



3. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. En los casos donde no coincidan, justifícalas o pregunta a tus compañeros cómo fue que llegaste a esa respuesta. En caso de duda, pide el apoyo de tu profesor y con todo el grupo discútelas.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

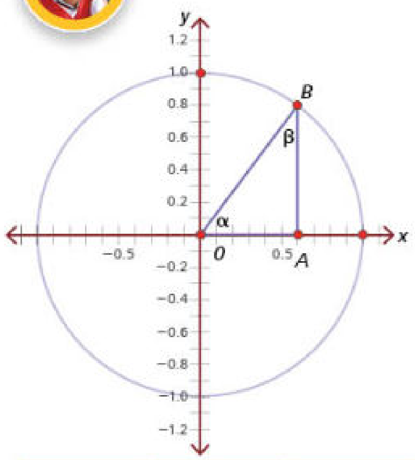
Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Reconozco las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo.			
Establezco correctamente las razones trigonométricas.			
Identifico qué razón trigonométrica relaciona ciertos elementos de un triángulo.			
Determino la razón trigonométrica de un ángulo, o dada la razón trigonométrica, determino la medida de un ángulo.			
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades? ¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño? ¿Qué actitudes asumí para desarrollar el hábito del pensamiento racional? Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:			

Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

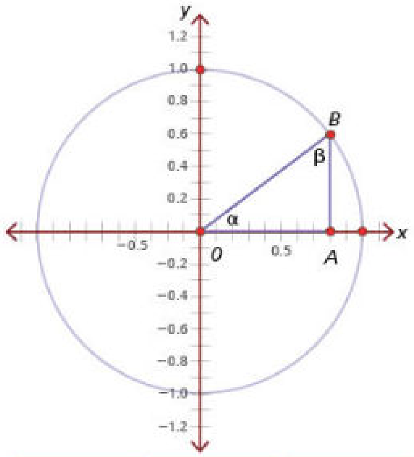
Razones trigonométricas seno, coseno y tangente

La trigonometría es una de las ramas de las matemáticas que más aplicaciones tiene en distintos ámbitos de la ciencia, como en la astronomía, la arquitectura e ingeniería, entre otros.

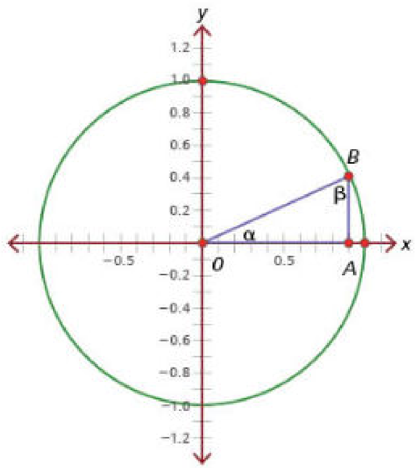
1. Calcula las razones trigonométricas de los triángulos que se forman. Posteriormente contesta las preguntas planteadas.



sen α =	cos α =	tan α =
sen β =	cos β =	tan β =



sen α =	cos α =	tan α =
sen β =	cos β =	tan β =



sen α =	sen β =
cos α =	cos β =
tan α =	tan β =

a) En el triángulo rectángulo que se encuentra determinado en los círculos unitarios, ¿qué relación existe entre sen α y la medida del cateto opuesto a α? ______________________________

Programa

Eje: *Forma, espacio y medida*
Tema: *Medida*
Contenido: *Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.*

Al margen

No se puede asegurar cuál fue el inicio de la trigonometría, pero la solución de problemas de astronomía entre los griegos seguramente fue uno de sus primeros caminos. Al respecto se encuentra la obra *Sobre las medidas y distancias del Sol y la Luna* en la que su autor, Aristarco de Samos, calculó las distancias relativas Tierra-Sol, Tierra-Luna. Aristarco aproximó el seno de un ángulo a partir de las razones de los lados de un triángulo rectángulo.

Aristarco de Samos (310-230 a.n.e.)

¿Cómo consideras que se realizaron las primeras aproximaciones de la distancia entre el Sol y la Luna? Explica.

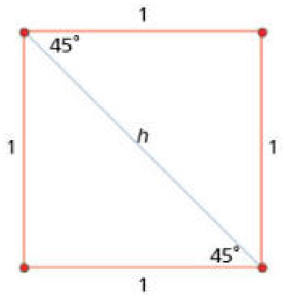
b) ¿Qué relación existe entre cos α y la medida del cateto adyacente a α?

c) Completa la siguiente ecuación:

sen(x) = cos (__________)

Formen equipos de cuatro integrantes y contesten lo que se pide. Los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos más comunes se obtienen con un par de escuadras iguales.

1. Coloquen un par de escuadras de 45° de tal manera que formen un cuadrado, como se muestra a continuación:

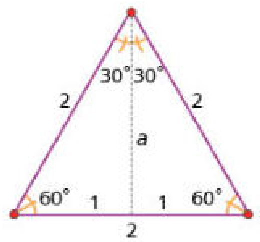


Si cada lado del cuadrado tuviera una medida de 1 u:

a) ¿Cuál es la medida de la diagonal? __________

b) ¿Cómo la obtuvieron? __________

2. Coloquen un par de escuadras de 30° y 60°, de tal manera que formen un triángulo isósceles.



Si la hipotenusa de cada triángulo midiera 2 u y el lado opuesto al ángulo de 30°, midiera 1 u:

a) ¿Cuánto tendría de altura el triángulo que se forma? Justifiquen su respuesta. __________

b) ¿Qué clase de triángulo es? __________

3. Con base en las medidas de los triángulos anteriores, completen la siguiente tabla, sin utilizar la calculadora.

Función	Medida del ángulo		
	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$		
Coseno			$\frac{1}{2}$
Tangente			

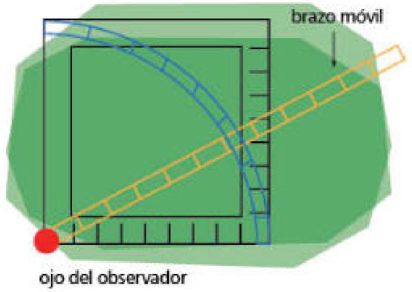
4. Comparen sus respuestas con las de sus demás compañeros.

1. En equipos de cuatro integrantes construyan un cuadrante, este instrumento fue usado hace muchos años para calcular distancias difícilmente accesibles de manera directa. El cuadrante se puede construir con cartoncillo, como se indica a continuación.

a) Construir un marco en forma cuadrada de 30 cm por lado y graduar en centímetros dos lados contiguos.

b) Fijar una cuarta parte de un círculo cuyo radio mida 30 cm y graduarlo de 0° a 90°.

c) Colocar un brazo móvil. Fijarlo en una de las esquinas como se indica en la figura.



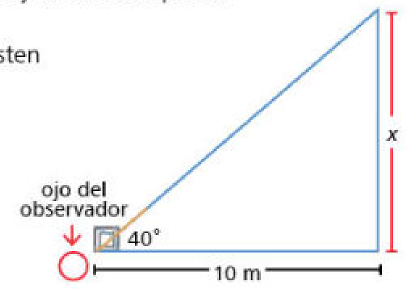
2. Hagan mediciones de ángulos con ayuda del cuadrante. Por ejemplo, si desean conocer la altura de un poste de luz, lleven a cabo lo siguiente:

a) Colocar el cuadrante como se muestra en la figura, con el lado inferior paralelo a la superficie del piso.

b) Levantar gradualmente el brazo móvil hasta fijar la cúspide del poste. Registrar el ángulo generado.

c) Asimismo, deben marcar el lugar donde ubicaron el cuadrante para medir la distancia entre éste y la base del poste.

3. Analicen la imagen y contesten las siguientes preguntas.

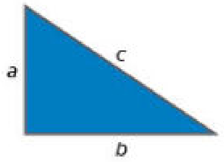


Recuerda que...

El Teorema de Pitágoras relaciona los lados de un triángulo rectángulo. Se puede usar en situaciones en las que se necesita encontrar la longitud de algunos de sus lados.

$c^2 = a^2 + b^2$

a y *b* son los catetos del triángulo rectángulo y *c* es la hipotenusa.



$a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en la resolución de los problemas en el llenado de la tabla de la actividad 3 que implican calcular las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°?
2. ¿Participó en la construcción del cuadrante y en la resolución de los problemas planteados?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros en la discusión sobre los procedimientos que utilizaron?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su pareja, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

a) Con los datos obtenidos con el cuadrante y la medición, ¿cómo calcularían la altura del poste? ______

b) Si saben que cada lado del cuadrante mide 30 cm, ¿a qué altura se levantó el brazo móvil sobre el lado del cuadrante?, ¿por qué? ______

c) ¿Cómo son entre sí los triángulos rectángulos que se forman en el cuadrante y de manera imaginaria entre el poste y el cuadrante? ______

d) Ahora, calculen la altura del mástil de su escuela.

4. Comenten el procedimiento utilizado y comparen sus respuestas con las de los otros equipos.

Para recordar

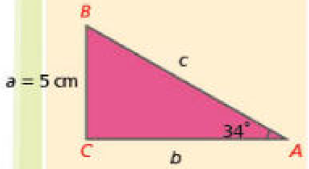
Como has observado, un triángulo rectángulo tiene cinco elementos principales: los dos ángulos agudos y sus tres lados. Si se conocen dos de esos elementos principales, que no sean los dos ángulos agudos, es posible calcular los valores de los elementos desconocidos.

Con el uso de una calculadora científica es posible conocer el valor de las distintas funciones trigonométricas de un ángulo.

Si se quiere conocer el valor del seno de 28° 47′, las teclas que se deben oprimir son:	Existen modelos de calculadoras donde el orden es distinto:
Sin 2 8 °′″ 4 7 °′″ =	2 8 °′″ 4 7 °′″ Sin =

Ejemplo:

		Los valores que se desea conocer son:		
Conocemos la medida de un cateto y un ángulo.	$a = 5$ cm $\angle A = 34°$ $\angle C = 90°$	¿Cómo obtendrías la medida del ángulo *B*?	Utiliza una calculadora y termina de obtener la medida de *b*. $\tan A = \frac{a}{b}$ $\tan 34° = \frac{5}{b}$ $b = \frac{5}{\tan 34°}$ $b =$ ______ $b =$ ______	$\text{sen } A = \frac{a}{c}$ $c = \frac{5}{\text{sen } 34°}$ $c = \frac{5}{0.559}$ $c = 8.94$ cm



Tecnología

Por medio de una calculadora científica se puede obtener la medida de un ángulo, si se conoce el valor de alguna de sus razones trigonométricas.

Si el seno de cierto ángulo fuera 0.5, entonces el valor de dicho ángulo se obtiene al oprimir una secuencia de teclas como las que se muestran, dependiendo del modelo de calculadora:

2ndF sin 0 . 5 = 30

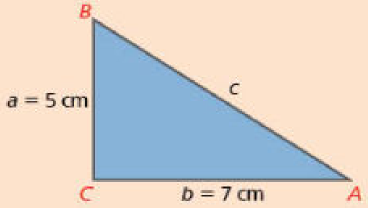
0 . 5 2ndF sin = 30

Esto quiere decir que el ángulo cuyo seno es igual a 0.5 mide 30°.

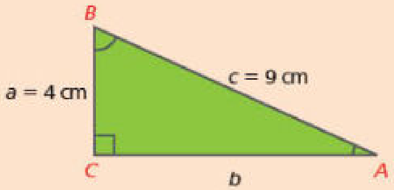
En algunas calculadoras la tecla 2ndF puede aparecer como INV o como Shift.

La secuencia de teclas que se oprimió es similar para cualquiera de las funciones trigonométricas.

1. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos. Usa una calculadora científica. En cada caso describe la secuencia de las teclas utilizadas.



$c =$
$\angle A =$
$\angle C =$



$b =$
$\angle A =$
$\angle B =$

¡A investigar!

Investiga lo que se pide en alguna dirección de internet o en algún libro de geometría.

- ¿Qué es el trigonómetro? ______
- ¿Cómo se construye un trigonómetro? ______
- ¿Cómo se utiliza en un problema práctico? ______
- Escribe un ejemplo. ______

1. Completa la tabla y traza en tu cuaderno la figura que corresponda.

Figura	Cateto a	Cateto b	Hipotenusa c	$\angle A$	$\angle B$
1	5	12			
2	8		17		
3		8			53°8´
4			12.08	24° 27´	

Valoración personal

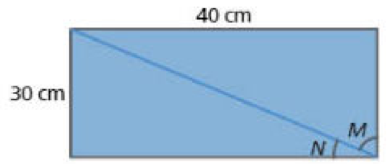
Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Resuelvo problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.			
Aplico el Teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en la resolución de problemas.			
Justifico de manera verbal o escrita la resolución de problemas que impliquen el uso de razones trigonométricas.			
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades? ¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño? ¿Qué actitudes asumí para desarrollar el hábito del pensamiento racional? Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:			

Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

2. Resuelve los siguientes problemas.

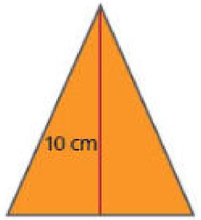
a) Calcula el seno de los ángulos indicados en el siguiente rectángulo.



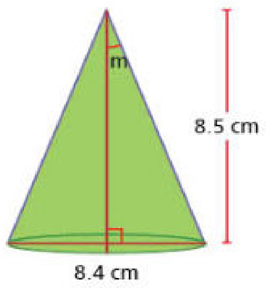
Sen N = ____________

Sen M = ____________

b) Calcula la longitud del lado del siguiente triángulo equilátero:



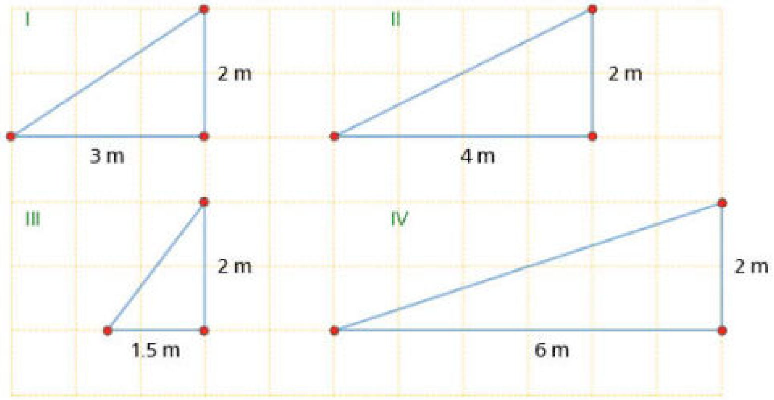
c) Si un cono tiene una base con diámetro de 8.4 cm y altura de 8.5 cm, ¿cuánto mide el ángulo generador del cono? ____________



3. Compara tus procedimientos con los de tus compañeros. ¿Utilizaron las mismas razones trigonométricas para conocer el resultado? ¿Existen varias maneras de resolver la tarea anterior?

Cálculo y análisis de la razón de cambio

1. Jorge es arquitecto y va a construir una rampa en un hospital. Tiene distintos modelos, pero debe construir una que cumpla con las normas de seguridad. Observa los modelos de sus rampas.



a) ¿Cuál es la rampa más inclinada? ¿Y cuál la menos inclinada? ____________

b) ¿Cuánto se eleva verticalmente la rampa I por cada metro que avanza horizontalmente? ¿Cuánto las rampas II, III y IV? ____________

c) ¿Qué rampa se eleva más verticalmente por cada metro que avanza horizontalmente? ¿Coincide con la que consideraste más inclinada? ¿Por qué? ____________

d) Describe la relación que se da entre la inclinación de las rampas y la distancia que se elevan por cada metro que avanzan de manera horizontal.

e) Si te dieran las medidas del largo y la altura de dos rampas, ¿cómo podrías saber cuál está más inclinada? Argumenta tu respuesta.

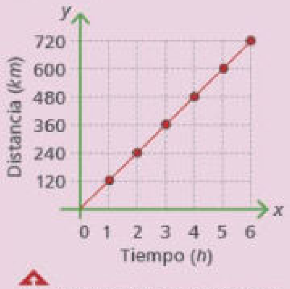
2. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y comenta sobre la aplicación de la pendiente en la construcción de las rampas.

3. La lluvia ácida daña el ambiente y es causada, en gran medida, por la contaminación. La acidez de la lluvia se mide mediante el nivel de pH; si el nivel es bajo entonces la acidez es mayor. En la siguiente gráfica aparecen las me-

Programa

Eje: *Manejo de la información*
Tema: *Proporcionalidad y funciones*
Contenido: *Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.*

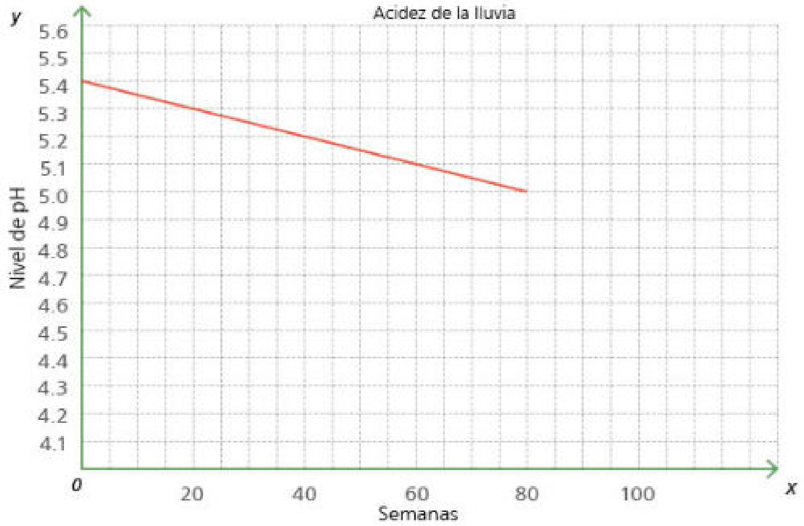
Al margen
La razón de cambio tiene diversas aplicaciones en la vida cotidiana. Se utiliza en la economía (para minimizar costos y maximizar calidad), en la física (para evaluar la máxima velocidad de un cuerpo), en geometría (para minimizar la cantidad de material para construir un cilindro) y en otras áreas del quehacer humano.



Las gráficas sirven para describir y cuantificar cambios entre dos variables.

¿En qué otras actividades cotidianas consideras que se encuentra alguna aplicación de la razón de cambio? Coméntalo con tus compañeros y con tu profesor.

diciones que se realizaron en una ciudad durante 80 semanas. Analiza la gráfica y a partir de ella, contesta las preguntas que se plantean.



a) ¿Qué sucede con el nivel de pH a medida que transcurren las semanas en esta ciudad? ______

b) ¿Cuál es la diferencia del nivel de pH de la semana 20 a la 40?, ¿y de la 40 a la 60? Describe el procedimiento que te permite obtener las diferencias. ______

c) ¿Disminuye la misma cantidad el pH de la semana 0 a la 20 que de la 60 a la 80? Justifica tu respuesta. ______

d) Si el nivel de pH continuara disminuyendo en la misma proporción durante las siguientes 40 semanas, ¿cuál sería el nivel de pH en la semana 120? Justifica tu respuesta. ______

e) ¿Cómo calcularías la cantidad que disminuye cada semana el nivel de pH en esta ciudad? ______

f) ¿Son constantes los cambios en el pH de 0 a 20 semanas, de 20 a 40, de 40 a 60, etcétera? Argumenta tu respuesta. ______

4. Escribe, con ayuda de tu profesor, una expresión algebraica con la que puedas calcular el nivel de pH en cualquier semana. ______

5. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y, con la guía de tu profesor, corrijan los errores que tuvieron.

Reúnanse en equipos de cuatro integrantes y resuelvan la siguiente actividad.

1. Ximena inició sus ahorros con $ 200 y ha ahorrado por semana $ 50, mientras que su hermana Lucía inició con $ 160 y ha ahorrado $ 70 por semana.

Las rectas de la gráfica muestran el incremento en los ahorros de Ximena y Lucía.

a) ¿De qué color es la recta que representa el ahorro de Ximena? ¿De qué color es la de Lucía? Justifiquen sus respuestas. ______

b) ¿Cuál es el incremento del ahorro de Ximena con respecto a las semanas transcurridas? ¿Y el de Lucía? Justifiquen sus respuestas. ______

c) ¿Cuál de las dos rectas presenta mayor inclinación? ¿A qué se debe esto? ______

d) ¿En qué semana coincide la cantidad ahorrada por ambas? Justifiquen su respuesta. ______

e) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta que representa el ahorro realizado por cada una? ¿Qué representan estos valores en los ahorros de cada una? Justifiquen su respuesta. ______

f) ¿Cuál de las dos pendientes es mayor? Justifiquen su respuesta. ______

2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y propongan otras situaciones o fenómenos con dos variables en la que una de ellas cambie en *función* de la otra. ______

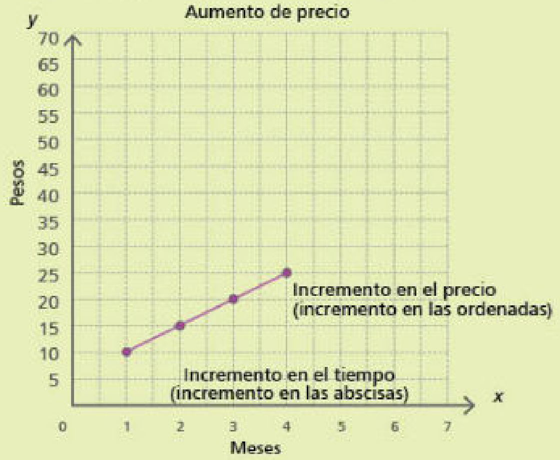
Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas, explicando por qué piensan así:

1. ¿Identificó los incrementos en los ahorros de Ximena y Lucía?
2. ¿Calculó el valor de la pendiente de las rectas que representan los ahorros de cada una?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros?
4. ¿Qué aspectos de su participación deben mejorar?

La *razón de cambio* es el cociente de los cambios que experimentan dos variables. Es por esto que matemáticamente se representa con una función lineal.

- Por ejemplo, en la siguiente gráfica se muestra el incremento del precio de un artículo a lo largo de algunos meses del año.



- El incremento en el precio del artículo con respecto al tiempo transcurrido representa la razón de cambio; esto es:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\text{incremento en el precio}}{\text{incremento en el tiempo}} = \frac{(25 - 10)}{(4 - 1)} = \frac{15}{3} = 5$$

- La razón de cambio se interpreta de manera gráfica como la pendiente o inclinación de la recta que representa la situación que se modeló matemáticamente.
- En la ecuación de la recta de la forma $y = mx + b$, m representa la pendiente; mientras que b representa la intersección de la recta con el eje y.

1. ¿Cuál es la ecuación de la recta que representa el comportamiento del aumento del precio de este artículo? ______

¡A investigar!

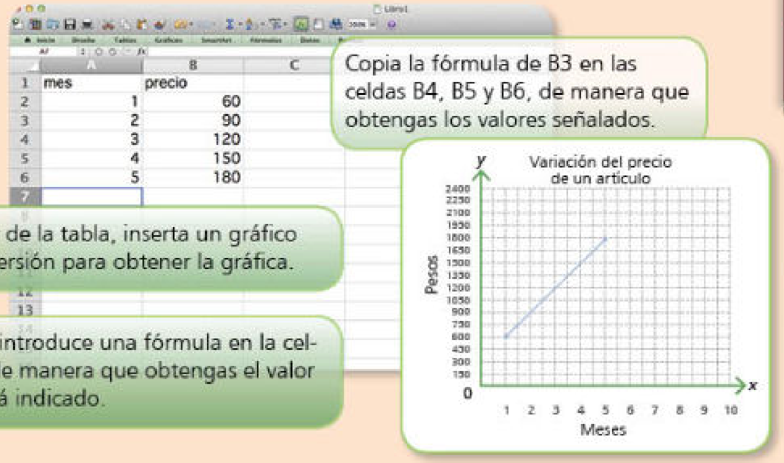
Investiga en internet qué es la tasa de crecimiento de una población y contesta.

- ¿Qué factores intervienen en el cálculo de la tasa de crecimiento de una población? ______
- ¿Cómo se calcula la tasa de crecimiento de una población? ______
- ¿Qué tipo de gráfica se obtiene al graficar la tasa de crecimiento? ______

Apoya tu investigación consultando la dirección electrónica: http://www.indexmundi.com/es/mexico/tasa_de_crecimiento.html (Consulta: 13 de enero de 2017).

Tecnología

1. La siguiente gráfica se construyó utilizando las herramientas de Excel. En ella se muestran los cambios en el precio de un artículo durante los primeros meses del año.



Copia la fórmula de B3 en las celdas B4, B5 y B6, de manera que obtengas los valores señalados.

A partir de la tabla, inserta un gráfico de dispersión para obtener la gráfica.

Ahora, introduce una fórmula en la celda B3 de manera que obtengas el valor que está indicado.

a) ¿Cuál fue la variación del precio que se presentó del primero al tercer mes? ¿Cuál es la razón de cambio? Justifica tus respuestas. ______

b) ¿Cuál fue la variación del precio del primero al cuarto mes? ¿Y al quinto mes? ¿Cuál es la razón de cambio en cada caso? Argumenta tus respuestas. ______

c) Si el incremento fue el mismo cada mes, ¿cuál fue la variación del precio del cuarto al séptimo mes? Justifica tu respuesta. ______

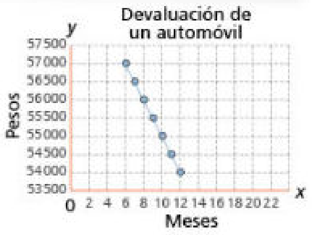
d) ¿Cuál es el incremento mensual del precio del artículo? ______

e) Si el primer mes corresponde a enero, ¿cuál es el precio del artículo en septiembre? ¿Y en diciembre? Justifica tus respuestas. ______

f) Finalmente, modifica el valor de B2 y comenta con tus compañeros lo que sucede con los demás valores de la tabla y cómo se refleja esto en la gráfica. Explica. ______

2. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y describe la relación que se da entre las razones de cambio que obtuvieron. ______

1. La siguiente gráfica muestra la depreciación que tiene un automóvil después de un tiempo de haber sido estrenado.



a) ¿Cuál es el precio del automóvil 6 meses después de haberlo estrenado?

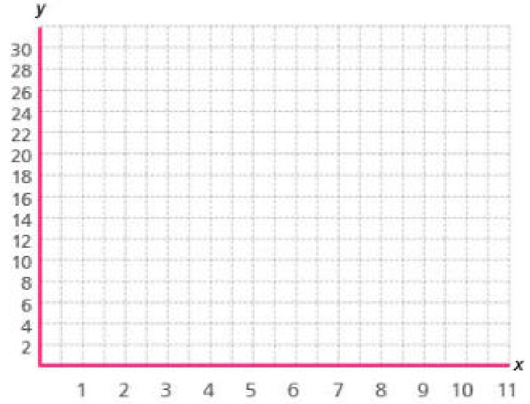
b) ¿Se depreció la misma cantidad de los 6 a los 8 meses que de los 10 a los 12 meses? Justifica tu respuesta.

c) ¿Cuál es la pendiente del tramo de recta que se muestra en la gráfica? ¿Cómo la obtuviste? Argumenta tu respuesta.

d) ¿Es posible que un auto pueda depreciarse siempre a la misma razón de cambio? Argumenta tu respuesta.

2. En la siguiente tabla se registra el estiramiento que sufre un resorte cuando se coloca un peso en él. Basándote en ella, traza la gráfica que le corresponde y contesta.

Peso en kg	0	1	3	4	5.5	7	8
Longitud del resorte en cm	12	13.5	16.5	18	20.25	22.5	24



a) ¿Cuál es la pendiente de la recta?

b) ¿Cuál es la razón de cambio con respecto al estiramiento del resorte en función del peso que se coloca en él?

c) Escribe una expresión con la cual puedas obtener el estiramiento del resorte para cualquier peso.

d) Si la longitud del resorte fuera de 10 cm sin peso, ¿cómo lo representarías en la gráfica?, ¿la pendiente es distinta?

3. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y, con la guía de tu profesor, corrijan los errores que tuvieron.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Obtengo, a partir de la gráfica de una función lineal, las razones de cambio del fenómeno que representa.			
Relaciono diferentes razones de cambio con la inclinación o pendiente de las rectas que las representan.			
Calculo y analizo la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal.			

¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades?
¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño?
¿Cómo demostré disposición para el estudio de los contenidos de esta lección?
Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:

Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

Medidas de dispersión

Al igual que sucede con cualquier conjunto de datos, la media, la mediana y la moda sólo nos revelan una parte de la información que necesitamos acerca de las características de ese conjunto.

Sin embargo, si los datos se encuentran ampliamente dispersos, la posición central es menos representativa; por lo que es necesario medir qué tan dispersos están los datos para tener información adicional.

1. En un hospital se encuentran tres personas internadas por problemas de la presión arterial, por lo que son monitoreados sobre su pulso cardiaco tres veces al día (cada 8 horas). El primer día de hospitalización se registraron los siguientes datos:

Fecha:	Pulsaciones por minuto			
Paciente 1	74	78	76	75
Paciente 2	62	92	75	68
Paciente 3	60	62	70	64

a) ¿Cuál de los tres pacientes tiene mayor variabilidad en sus pulsaciones?

b) ¿Cuál es el promedio de pulsaciones de cada paciente?

c) ¿Cuál es la diferencia entre los números mayor y menor de pulsaciones por minuto de cada paciente? ¿Qué indica esta diferencia? ¿Resultó la misma diferencia para cada paciente?

d) Verifica si a mayor diferencia entre el número mayor y menor de pulsaciones por minuto de cada paciente, es mayor variabilidad entre los datos. Justifica tu respuesta.

2. Valida tus respuestas con las de otros compañeros. Luego, escribe por qué es importante tomar en cuenta la variabilidad o dispersión de un conjunto de datos.

Analicen la siguiente información y respondan, en equipos de tres integrantes, lo que se pregunta.

1. Cuatro jugadoras de basquetbol se han sometido a la siguiente prueba: Cada una de ellas ha hecho 10 tiros a la canasta a una distancia del tablero de 1 m, otros 10 lanzamientos desde 2 m, y así sucesivamente hasta 8 m. En cada caso se han anotado los siguientes encestes:

Programa

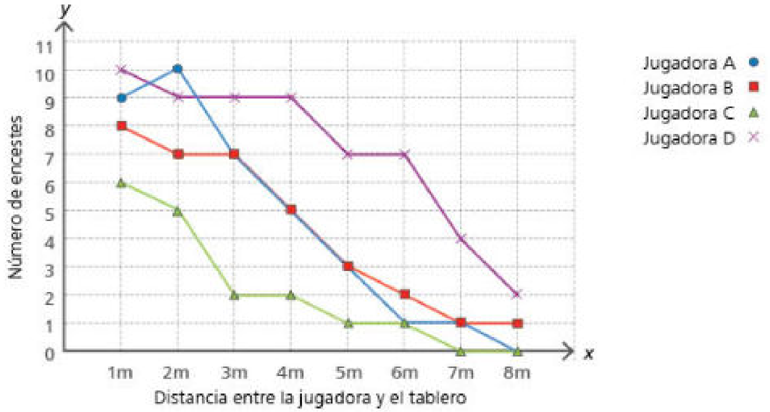
Eje: *Manejo de la información*
Tema: *Análisis y representación de datos*
Contenido: *Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.*

Al margen

La medición del pulso proporciona información importante acerca de la salud. Por ejemplo, el pulso rápido puede ser un signo de la presencia de una infección o deshidratación.
En un estudio, a una persona se le tomó el pulso en reposo y después de practicar algún deporte. Los datos son:
En reposo: 60, 68, 64.
Después de practicar deporte: 78, 80, 96.
¿En qué caso la amplitud o rango de los datos es mayor? ¿Cuál es su valor en cada caso?

Monitor de signos vitales.

	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m	7 m	8 m
Jugadora A	9	10	7	5	3	1	1	0
Jugadora B	8	7	7	5	3	2	1	1
Jugadora C	6	5	2	2	1	1	0	0
Jugadora D	10	9	9	9	7	7	4	2



a) ¿Qué jugadora es más eficaz en el enceste? Den argumentos matemáticos válidos que sustenten su respuesta. ____________________

____

2. Un entrenador de atletismo debe decidir cuál de los dos corredores debe elegir para la próxima carrera de 100 metros planos. El entrenador basará su decisión en los resultados que tiene registrados de cinco carreras realizadas por los dos atletas.

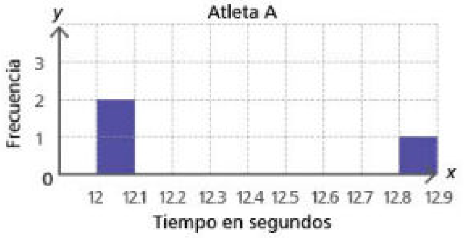
	Carreras				
Atleta	1	2	3	4	5
A	12.2 s	12 s	12 s	12.8 s	12.2 s
B	12.2 s	12.3 s	12.3 s	12.4 s	12.6 s

Amplitud es la diferencia entre el valor máximo y mínimo de una cantidad variable, de su valor medio o valor base.

a) ¿Cuál es la amplitud o rango de cada conjunto de datos? ____________________

b) ¿Cuál es la media aritmética de las medidas respectivas? (Usen su calculadora). ____________________

3. Completen las gráficas de frecuencias con los datos de cada caso y ubiquen el promedio, respectivamente.



a) ¿En cuál de los dos conjuntos es más homogénea la distribución de los datos? ____________________

b) ¿En qué caso los datos están más dispersos? ____________________

c) ¿En cuál se aleja más de la media la distribución de datos? ____________________

d) ¿Cuál de los dos corredores debe elegir y por qué? ____________________

e) Si al principio de la cuarta carrera el corredor A se cayó, ¿el entrenador debe considerar este incidente para tomar su decisión? ____________________

4. En plenaria y con la orientación de su profesor hagan una puesta en común de sus respuestas, así como de sus procedimientos o cálculos que hayan realizado y lleguen a un consenso sobre las respuestas correctas.

1. Reúnete con algún compañero y respondan los planteamientos.

a) Los siguientes datos corresponden a los precios de un mismo artículo en dos estados de la República Mexicana.

Estado A: $ 25, $ 25, $ 26, $ 24, $ 30, $ 25, $ 23, $ 23, $ 24, $ 29

Estado B: $ 25, $ 29, $ 28, $ 23, $ 30, $ 25, $ 29, $ 28, $ 24, $ 30

- ¿Qué características encuentran en los dos conjuntos de datos?

____

b) Estos datos también corresponden a los precios de un mismo artículo en dos estados de la República Mexicana.

Estado C: $ 12.00, $ 13.00, $ 14.00, $ 15.00, $ 16.00, $ 17.00

Estado D: $ 12.00, $ 16.00, $ 16.70, $ 16.80, $ 16.90, $ 17.00

- ¿Qué características encuentran en los dos conjuntos de datos?

____

2. Reúnanse con otra pareja de compañeros y comparen las características que determinaron en cada par de series de datos. Luego, respondan lo siguiente:

¿La amplitud o el rango de los datos es un indicador de la variación de los datos? Si dos conjuntos de datos tienen la misma media pero con rangos diferentes, ¿estos datos tienen la misma dispersión? Si dos conjuntos de datos tienen la misma amplitud, entonces, ¿tienen la misma dispersión? Escriban sus conclusiones. ______________________________

____

1. Analicen la siguiente información. Luego, lleven a cabo lo que se pide.
   - Cuando se dice que la dispersión de una serie es menor, es porque los datos están agrupados en la cercanía de su media, siendo mayor si los datos están alejados de ella.
   - La dispersión de los datos se puede cuantificar y determinar qué tan próximos o alejados están de la media ($\bar{x}$). Una medida que muestra la dispersión o variabilidad en los datos es la desviación media (*Dm*).
   - La desviación media de un conjunto de datos es la media aritmética de las distancias de cada valor a la media aritmética de los datos. Por ejemplo, si se tienen cinco datos: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 y $\bar{x}$ es su media, entonces la desviación media (*Dm*) se calcula de la siguiente manera:

$$Dm = \frac{(|x_1-\bar{x}| + |x_2-\bar{x}| + |x_3-\bar{x}| + |x_4-\bar{x}| + |x_5-\bar{x}|)}{5}$$

a) A partir de la información anterior, llenen las siguientes tablas y obtengan la desviación media de cada una de las siguientes series de datos. Utilicen su calculadora.
   - Estado *C*: \$12.00, \$13.00, \$14.00, \$15.00, \$16.00, \$17.00, $\bar{x} = 14.50$
   - Estado *D*: \$12.00, \$16.00, \$16.70, \$16.80, \$16.90, \$17.00, $\bar{x} = 15.90$

Serie C		
x	$x-\bar{x}$	$\|x-\bar{x}\|$
12.00	−2.50	2.50
13.00	−1.50	1.50
14.00	−0.50	0.50
15.00	0.50	
16.00	1.50	1.50
17.00		
Total		9.00

$Dm = \frac{\quad}{6}$

Serie D		
x	$x-\bar{x}$	$\|x-\bar{x}\|$
12.00		
16.00		
16.70		
16.80		
16.90		
17.00		
Total		

$Dm = \frac{\quad}{6}$

b) ¿Cuál es el rango de precios en cada estado? ______________________________

c) ¿Cuál es la desviación media de los precios de cada estado? ______________________________

d) ¿En qué estado el precio tiene menor variación? ______________________________

e) ¿En qué estado el precio promedio es más alto? ______________________________

f) ¿Qué serie de datos tiene mayor dispersión? ______________________________

g) ¿Qué indica la *Dm*? ______________________________

2. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. En los casos donde no coincidan, como los datos de las tablas, verifiquen sus procedimientos de cálculo. Luego, discutan la siguiente pregunta: ¿A mayor desviación media, mayor dispersión del conjunto de datos y viceversa? Escriban una conclusión al respecto.

____

¡A investigar!

Investiga en libros de texto o en internet, por ejemplo, en las siguientes páginas Web:

a) http://www.aaamatematicas.com/g83a_ax1.htm (Consulta: 13 de enero de 2017).

b) http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/valor-absoluto.html (Consulta: 13 de enero de 2017).

- ¿Qué es el valor absoluto de un número y cómo se denota? ______________________________

Comparte con tu grupo los resultados de tu investigación.

Tecnología

1. Visita la siguiente página electrónica: http://www.alcula.com/es/calculadoras/estadistica/desviacion-media/ (Consulta: 13 de enero de 2017).
2. Utiliza la calculadora de desviación media que ahí se encuentra y verifica los cálculos que realizaste anteriormente. Luego, haz ante tu grupo una exposición de tu trabajo.

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en el análisis de la dispersión de datos?
2. ¿Verificó con otros equipos sus respuestas y procedimientos?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de otros compañeros?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su compañero, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

Resuelve los siguientes problemas.

1. El gerente de una empresa de alimentos desea saber qué tanto varían los pesos de los empaques (en gramos) de uno de sus productos para determinar cuánto es el promedio de pérdidas causado por el exceso de peso en los empaques. Así que opta por seleccionar al azar cinco unidades de éste para pesarlas. Las unidades tienen los siguientes pesos: 490, 500, 510, 515 y 520 gramos, respectivamente.

   a) ¿Cuál es el peso promedio de las cinco unidades empacadas? ________

   b) ¿Cuál es el rango de variación de los pesos? ________

   c) ¿Cuál es la desviación media de los datos? ________

   d) ¿Cuál es el número de gramos que varían por debajo y por encima del promedio? ________

2. Tres alumnos son sometidos a una competencia para probar sus conocimientos en 10 materias diferentes, cada una sustentada con 10 preguntas. La idea del concurso es encontrar al alumno idóneo para representar al colegio en un torneo a nivel nacional.

El número de respuestas correctas por materia se muestra a continuación:

Materia	Carla	Andrea	José
1	2	7	5
2	9	2	6
3	10	2	5
4	2	6	5
5	3	6	5
6	1	3	5
7	9	6	4
8	9	7	5
9	1	6	6
10	4	5	4

   a) ¿Los tres alumnos responden en promedio cinco preguntas correctas por prueba? ________

   b) ¿Quién de los tres presenta menor variación en sus respuestas correctas? ________

3. ¿Cuál de los dos conjuntos tiene mayor dispersión? ¿Por qué? ________

Conjunto A: 10, 20, 30, 40, 50 y 60 cm

Conjunto B: 10, 10, 10, 60, 60 y 60 cm

4. Compara tus respuestas con tus compañeros del grupo. En los casos donde no coincidan, verifica por qué. Por ejemplo, en el caso del problema 2, ¿es verdad que José es quien presenta una desviación media menor en comparación con Carla y Andrea?

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓) Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Reconozco cuáles son las medidas de dispersión de datos.			
Reconozco que con la dispersión de los datos se puede cuantificar qué tan próximos o alejados están de la media.			
Identifico que la amplitud o el rango es un indicador de la variación de los datos.			

¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades?
¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumí para desarrollar el hábito del pensamiento racional?
Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:

Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

CONEXIONES

Las matemáticas, armonía del mundo

La arquitectura se define como el arte en el que se proyectan y construyen edificios de todo tipo y para todo uso. Se le considera una de las Bellas Artes, pues implica también una búsqueda constante de la estética.

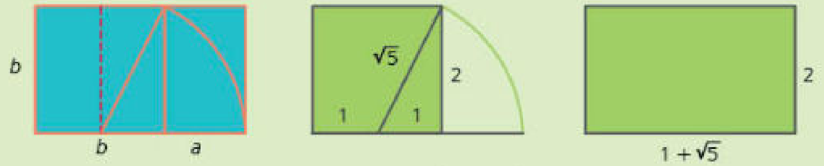
Se puede establecer una relación entre la arquitectura y las matemáticas, por ejemplo, en el tema de las proporciones: ya se trate de proporciones con respecto al ser humano, con los ambientes o de las proporciones entre elementos de una fachada. Tanto en arquitectura como en escultura y pintura se establecieron una serie de relaciones de medida que llevaron al concepto de proporción.

En la arquitectura las matemáticas establecen relaciones de medida.

La proporción viene dada por la relación entre las dimensiones de dos o más partes de un todo, o entre las partes respecto a su totalidad. La proporción también se identifica con las relaciones de tamaño que guardan unas formas con las formas de su entorno.

Buscando siempre el ideal de belleza y, por tanto, de proporción, se llegó hasta la "divina proporción", encontrada mediante la "proporción áurea", cuya razón era definida por el "número de oro", Ø = 1.618…

A este número se llegaba relacionando los segmentos a y b de un rectángulo:



$$\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a} = 1.618$$

La sección áurea (basada en el número de oro Ø) fue empleada por filósofos, científicos y artistas que terminaron llamándola en el Renacimiento "La divina proporción".

Actividad

1. Ingresen en la siguiente dirección electrónica y vean el video que ahí se propone: *Las matemáticas, la armonía del mundo* [Documental de Canal 2 Andalucía sobre las aplicaciones de las matemáticas en el mundo moderno]. Consideren que el programa dura alrededor de 24 minutos. http://www.documentales-online.com/las-matematicas-la-armonia-del-mundo/ (Consulta: 23 de enero de 2017).
2. Al término del programa, comenten por qué las matemáticas son la armonía del mundo.

Evaluación tipo PISA

Plan de entrenamiento

Diego es un corredor profesional y con la idea de mejorar su velocidad, su entrenador le ha dado a escoger dos planes de entrenamiento. En cada prueba debe correr a su máxima velocidad:

Plan 1	
Número de prueba	Tiempo (min)
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
n	

Plan 2	
Número de prueba	Tiempo (min)
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
n	

1. Si la secuencia continúa en cada uno de los planes, ¿en cuál correrá más tiempo en la décima prueba? Justifica tu respuesta. __________

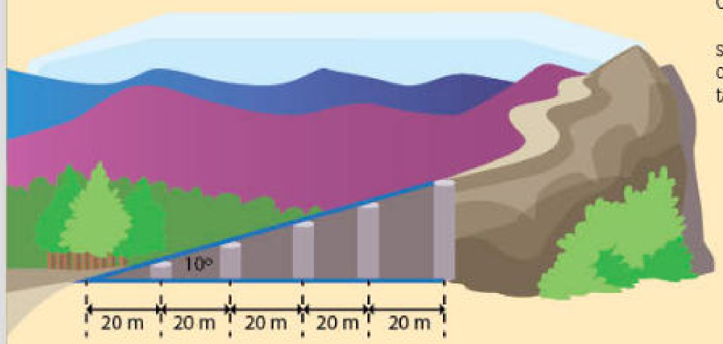
2. ¿En qué número de prueba el tiempo a correr es el mismo en los dos planes? Justifica tu respuesta. __________

3. Escribe una expresión algebraica que represente la regla general de cada plan.

   Plan 1: __________ Plan 2: __________

Construcciones de puentes

En la construcción de una carretera, se hará un puente que se sostiene en cinco pilares cilíndricos, como lo indica el dibujo.



Considera que:

sen 10° = 0.1736
cos 10° = 0.9848
tan 10° = 0.1763

1. ¿Cuál es la altura de cada pilar cilíndrico? Registra tus operaciones.

2. ¿Cuál es la longitud del puente? Registra tus operaciones.

Botánica

Para su clase de Ciencias, Marco investigó si un tipo de plantas de hortalizas crecen más bajo la luz solar o con una intensidad igual de luz procedente de varias lámparas. La tabla siguiente contiene las mediciones que realizó.

	Altura de las plantas (en centímetros) para cada una de las colecciones de iluminación									
Luz solar	0.4	1.2	1.8	1.9	2	2.2	2.3	2.5	2.6	2.6
Luz artificial	0.4	1.5	1.8	2	2	2.2	2.2	2.3	2.5	2.6

Con los datos mostrados en la tabla, debido a que el rango de variación en el crecimiento en los dos casos es el mismo, al igual que el promedio, Marco tuvo que determinar la desviación media (*Dm*) de cada caso. La *Dm* en el caso de las plantas con luz solar es de 0.5 cm, mientras que la *Dm* de las plantas con luz artificial es de 0.4 cm. Con estos datos, concluye que las plantas de hortalizas crecen más con luz artificial.

1. Supón que formas parte de un jurado de un concurso escolar sobre experiencias en la clase de Ciencias. Evalúa la conclusión de Marco con argumentos matemáticos. __________

Estudio de precios

Se hizo una investigación sobre el precio de una marca de jabón de tocador de 180 g en cinco tiendas del estado de Sonora y en cinco tiendas del estado de Quintana Roo. Los datos son los siguientes:

	Baja California				
Precio ($)	10.44	10.49	10.94	11.45	14.48
	Quintana Roo				
Precio ($)	8.15	8.51	9.15	10.48	12.56

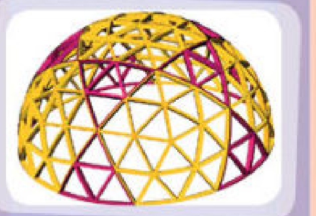
1. ¿Cuál es el rango de precios en cada estado? Registra tus operaciones.

2. ¿En cuál de los dos estados el precio promedio es mayor? Da argumentos matemáticos. __________

3. Determina la *Dm* de cada caso y haz una conclusión al respecto. Proporciona argumentos matemáticos.

BLOQUE 5

Sentido numérico y pensamiento algebraico



Forma, espacio y medida

Manejo de la información

Aprendizajes esperados

Al finalizar este bloque podrás:

- Resolver y plantear problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resolver problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen.
- Anticipar cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Leer y representar, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resolver problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Introducción

En este bloque pondrás en juego tus conocimientos sobre ecuaciones al resolver problemas en distintos contextos que van desde la construcción de puentes y bardas hasta los desplazamientos de diversos objetos como los trenes. Por otra parte, realizarás cortes a dos cuerpos geométricos para analizar las diversas formas que resultan. Además, deducirás la fórmula para calcular el volumen de cualquier cilindro y la fórmula para calcular el volumen de un cono. También conocerás cómo calcular el volumen de un objeto que no tiene una forma geométrica, como una piedra.

Analizarás diversas situaciones en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades, como la relación entre la distancia recorrida y los litros de gasolina que consume un automóvil, el tiempo y cantidad de agua que sale de un grifo que se requiere para llenar diferentes recipientes, la distancia recorrida y el costo de la renta de un auto, etcétera.

Además, participarás en varios juegos de azar como el lanzamiento de monedas, de dados o una carrera de caballos. Para terminar, averiguarás cuáles son las condiciones necesarias para que un juego sea considerado justo.

¡Planteamiento del acertijo!

Un volado de tres monedas

- Juan le dice a Pedro: —Voy a arrojar tres monedas al aire. Si todas caen en sol te daré diez pesos y si todas caen en águila también te daré diez pesos. Pero si caen de alguna otra manera, tú me das cinco pesos, ¿aceptas la apuesta?
- Pedro dice: ¡Bien, acepto la apuesta!
- ¿Qué probabilidad tiene Pedro de ganar? Argumenta tu respuesta y compárala con las de tus compañeros.

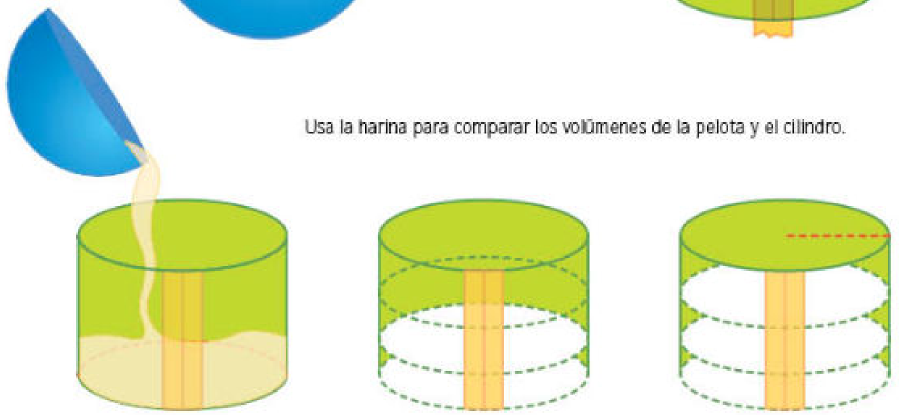
PROYECTO 5

Volumen de cuerpos geométricos

Lo que necesitas:
- Una pelota
- Una cartulina
- Cinta adhesiva
- Tijeras
- harina

En este proyecto vas a investigar la relación que existe entre el volumen de la esfera y el volumen de un cilindro, usando harina.

1. Para calcular el volumen de la esfera se considerará una semiesfera de radio r construida a partir de la pelota y un cilindro cuya base tenga el mismo radio r y altura $2r$.
2. Corta la pelota en dos partes iguales, de manera que resulten dos semiesferas de igual radio. Con la cartulina construye un cilindro cuyo radio de la base sea igual que el radio de la esfera y la altura igual que el doble del radio. Pégalo con cinta adhesiva, dejando una base descubierta.



Usa la harina para comparar los volúmenes de la pelota y el cilindro.

a) ¿Cuál es la fórmula para obtener el volumen de un cilindro? ____________

b) ¿Cuál es el volumen del cilindro si el radio de su base es r y su altura es $2r$? ____________

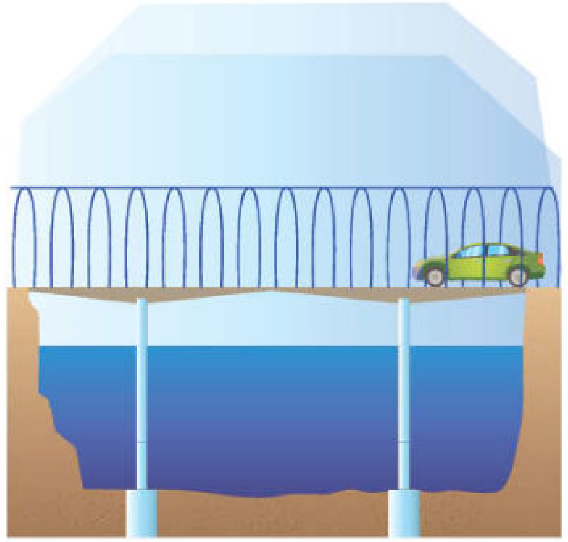
c) ¿Cuál es el volumen de la semiesfera cuyo radio es r? ¿Qué relación hay entre el volumen de la esfera y el volumen del cilindro? ____________

3. Si no puedes responder algunas de las preguntas de este proyecto, no te preocupes, realiza las actividades de las lecciones 28 y 29. Después, retoma el proyecto y trata de responder todas las preguntas. Justifica tus respuestas.

Aplicación de ecuaciones en la solución de problemas

Comúnmente, a partir de un problema se encuentra la expresión algebraica o la ecuación que lo describe; pero también es posible lo contrario: que a partir de una expresión algebraica dada se desarrolle un problema o se encuentre una aplicación.

1. Un poste que sostiene un puente sobre un río tiene bajo tierra $\frac{1}{5}$ parte de su longitud y bajo el agua $\frac{3}{4}$. Si entre estas partes suman 114 m, ¿cuál es la longitud total del poste? ____________



2. Compara tus respuestas con las de tus compañeros. En caso de que no coincidan, verifica por qué.
3. Analiza el siguiente problema, plantea una ecuación para resolverlo, escríbela y contesta lo que se pide.

La edad de Sergio será, dentro de tres años, el cuadrado de la que tenía hace tres años. ¿Cuál es la edad que tiene Sergio ahora? ____________

1. Analicen el siguiente problema.

Un tren sale de la Ciudad de México rumbo al norte a 30 $\frac{km}{h}$. Dos horas más tarde, otro tren sale de la misma ciudad a 45 $\frac{km}{h}$ con la misma dirección sobre una vía paralela. ¿A qué distancia de la

Programa

Eje: *Sentido numérico y pensamiento algebraico*
Tema: *Patrones y ecuaciones*
Contenido: *Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.*

Al margen

Cuando los ingenieros diseñan puentes, deben tener en cuenta el impacto que sobre ellos tienen las fuerzas externas, como vientos fuertes, el movimiento del agua, la posibilidad de sismos e incluso los cambios bruscos de temperatura que pueden hacer que los materiales del puente se expandan o se contraigan. Para todo lo anterior se desarrolla una gran cantidad de modelos matemáticos que evalúan la resistencia de materiales como el acero.
Investiga cómo se mide la resistencia de un material como el acero y describe de manera muy general las cuestiones matemáticas que conoces y puedes reconocer en dicho proceso.

Puente Golden Gate en San Francisco, E.U.A.

ciudad dará alcance el segundo tren al primero? Para resolver este problema, primero contesten las siguientes preguntas.

a) Dada la fórmula *velocidad* = $\frac{distancia}{tiempo}$, ¿cómo se expresa la distancia en función de la velocidad y el tiempo? ______

b) Cuando el tren que va a 45 $\frac{km}{h}$ lleva una hora de viaje, ¿qué distancia ha recorrido el que va a 30 $\frac{km}{h}$? ______

c) ¿A qué distancia de la Ciudad de México se encuentra cada tren después de cuatro horas de haber salido el primer tren? ______

d) En el momento en que el segundo tren alcanza al primero, ¿cómo son entre sí las distancias que ha recorrido cada uno? ¿Y los tiempos?

e) Si t representa el tiempo en horas que ha transcurrido desde que salió el segundo tren, escriban una expresión algebraica que represente el tiempo que ha transcurrido desde que salió el primer tren en función de t. ______

f) Si t representa el tiempo en horas que ha transcurrido desde que salió el segundo tren y d la distancia que ha avanzado cada uno de ellos, escriban una expresión algebraica para la distancia que ha avanzado cada tren en función de t. ______

g) Con base en las expresiones que escribieron, ¿cómo obtendrían el valor de la distancia en que el segundo tren alcanza al primero?

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en el análisis de los problemas y justificó sus respuestas y conclusiones?
2. ¿Comparó con otros equipos sus respuestas?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros en la discusión acerca de los procedimientos que utilizaron?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su pareja, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

2. A partir de cada una de las siguientes expresiones planteen un problema.

$d = 100\,t$ $\qquad$ $d = 120(t - 1)$

3. Comenten sus respuestas con otros compañeros.

4. Lean el siguiente problema y hagan lo que se pide.

a) En una tienda de abarrotes se ofrecen distintos paquetes armados de jugos de sabores y leches. Un paquete contiene tres litros de leche y cuatro litros de jugo a un precio de $ 85.00. Otro paquete contiene cinco litros de leche y dos litros de jugo por un precio de $ 81.00. ¿Cuál es el precio de un litro de leche?, ¿y el de un litro de jugo? ______

b) Planteen un sistema de ecuaciones y resuélvanlo. Al terminar, comparen sus respuestas con las de otros equipos. En caso de que no coincidan, verifiquen por qué y escriban una conclusión.

En parejas

1. A partir de los sistemas de ecuaciones lineales que se proponen, redacten en su cuaderno un problema para cada uno y resuélvanlo.

a) $2m + 3n = 29$ $\quad 5m + 7n = 70$

b) $a + 3b = 42$ $\quad 2a + 4b = 64$

c) $2x + y = 90$ $\quad y = x + 30$

2. Comenten sus respuestas con las demás parejas.

Para avanzar

En muchas situaciones y problemas se conoce la relación entre algunas cantidades, pero no se sabe el valor de todas ellas. Para encontrarlo, es necesario expresar el enunciado en una o varias ecuaciones y después resolverlas con algunos de los procedimientos que ya conoces.

1. Los siguientes problemas se modelan mediante una ecuación o sistema de ecuaciones dado. Al resolverla, se da solución al problema.

a) La edad de un niño será dentro de tres años el cuadrado de la que tenía hace 3 años, ¿cuál es la edad actual del niño? ______

Ecuación: $x + 3 = (x - 3)^2$ $\qquad$ Edad $= x$

b) El perímetro de un triángulo isósceles es de 36 cm. Si cada uno de sus lados iguales es 6 cm mayor que el de la base, ¿cuáles son las medidas de los lados del triángulo? ______

Ecuación: $x + (x + 6) + (x + 6) = 36$

La base mide x y los otros lados miden $x + 6$

c) Un comerciante vendió 84 pantalones de mezclilla a dos precios distintos: unos a $ 450 y otros a $ 360. Si obtuvo en total $ 33 390, ¿cuántos pantalones vendió de cada precio? ______

Sistema de ecuaciones: $x + y = 84$

$450x + 360y = 33\,390$

Vendió x pantalones a $ 450.00 y vendió y pantalones a $ 360.00.

Recuerda que...

Un sistema de ecuaciones de dos incógnitas se puede resolver mediante los métodos de: *sustitución*, *igualación* y *reducción*.

Sustitución

1. Se despeja una de las incógnitas.
2. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación.
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido se sustituye en la ecuación.

Ejemplo: $\begin{cases} x + y = -15 \\ y = -3 + x \end{cases}$

$$\begin{aligned} x + (-3 + x) &= -15 \\ 2x - 3 &= -15 \\ 2x &= -15 + 3 \\ 2x &= -12 \\ x &= -6 \\ y &= -3 + (-6) \\ y &= -9 \end{aligned}$$

Igualación

1. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
2. Se igualan las expresiones.
3. Se resuelve la ecuación y el valor obtenido se sustituye.

Ejemplo:

$\begin{cases} x + y = 18 \\ -x + y = -12 \end{cases}$

$$\begin{aligned} y &= 18 - x \\ y &= -12 + x \\ 18 - x &= -12 + x \\ -2x &= -12 - 18 \\ -2x &= -30 \\ x &= 15 \\ y &= 18 - (15) \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Reducción

1. Se multiplica cualquiera de las dos ecuaciones por un número.
2. Se resuelve la ecuación y el valor obtenido se sustituye.

Ejemplo:

$\begin{cases} 4x + 2y = 22 \\ 5x - 2y = 5 \end{cases}$

$$\begin{aligned} 9x &= 27 \\ x &= 3 \\ 4x + 2y &= 22 \\ 4(3) + 2y &= 22 \\ 12 + 2y &= 22 \\ 2y &= 22 - 12 \\ 2y &= 10 \\ y &= \tfrac{10}{2} \\ y &= 5 \end{aligned}$$

¡A investigar!

En la física puedes encontrar muchas expresiones algebraicas que se aplican a distintos fenómenos. Para cada una de las siguientes expresiones investiga, en fuentes bibliográficas o páginas de internet, a qué fenómeno se asocia y escribe en tu cuaderno un breve resumen al respecto. A partir de ello, plantea una situación que pueda resolverse utilizando dicha expresión algebraica.

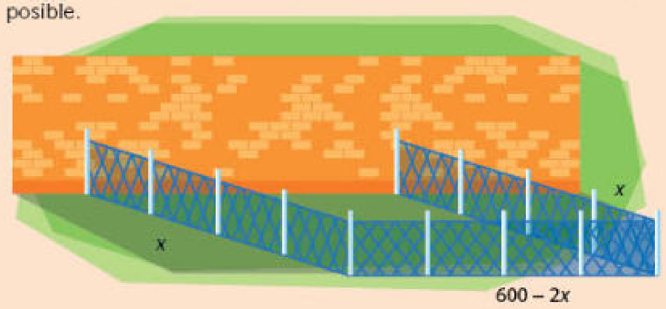
- $E = mc^2$
- $y = \frac{1}{2}gt^2$

Comenta con el grupo los resultados de tu investigación.

Tecnología

1. Analiza la siguiente situación, contesta las preguntas y realiza lo que se pide.

a) Un granjero tiene construida una barda en su terreno. El granjero desea aprovechar la barda para construir un corral rectangular; para ello dispone de 600 metros de valla de alambre. Él desea que el corral tenga la mayor área posible.



- De acuerdo con los datos que se indican en la figura, ¿cuál es la expresión algebraica que representa el área del corral? ____________________
- ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el corral para determinar la mayor área posible? ____________________
- Con ayuda de una hoja de cálculo explora las distintas dimensiones que puede tener el corral y determina cuáles son las que determinan la mayor área. Para ello, construye una hoja electrónica de cálculo como la siguiente:

b) Compara tus respuestas con las de otros compañeros.

	A	B
1	x (metro)	Área del corral (m²)
2	0	0
3	1	598
4	2	1192
5	3	1782
6	4	2368
7	5	2950
8	6	3528
9	7	4102
10	8	4672
11	9	5238
12	10	5800
13	⋮	⋮

= A3 + 1

=600*A2−2*(A2^2)

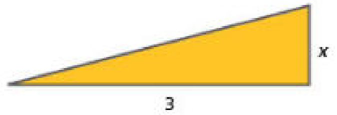
- Con ayuda del editor de gráficos construye la gráfica del tipo dispersión (*xy*) con respecto a las columnas *A* y *B*.

c) Si la expresión para calcular un área fuera $120x - 2x^2$, ¿cómo cambiaría el problema del granjero? ¿Cuáles serían las dimensiones del corral para encerrar la mayor área posible? ____________________

Tecnología

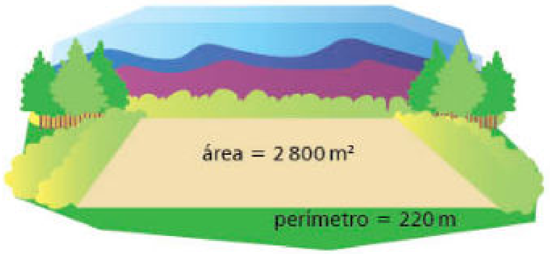
1. Resuelve los siguientes problemas.

a) El perímetro de un triángulo rectángulo es de 12 cm y uno de sus catetos mide 3 cm, ¿cuánto mide el otro cateto?, ¿y cuánto mide la hipotenusa? ____________________



b) Un ciclista parte de un pueblo a una velocidad promedio de 500 metros por minuto, y cinco minutos más tarde sale otro ciclista que tarda 20 minutos en alcanzarlo. ¿Qué velocidad lleva el segundo ciclista? ____________________

c) Un campo rectangular tiene un área de 2 800 m² y su perímetro es de 220 m, ¿cuáles son las dimensiones del terreno? ____________________



d) En una cafetería se venden tortas de jamón en \$ 15 y tortas de milanesa en \$ 20. Si durante un día se vendieron 86 tortas y se juntaron \$ 1 560, ¿Cuántas tortas de jamón se vendieron? ¿Y cuántas de milanesa? ______

2. Presenta tus respuestas al grupo y escriban sus estrategias de solución.

3. Plantea lo que se pide en cada caso.

a) Una ecuación lineal que tenga como solución −5.

b) Una ecuación lineal cuya solución sea 9.

c) Una ecuación cuadrática que tenga como solución 12.

d) Una ecuación cuadrática que no tenga solución.

e) Una ecuación cuadrática cuyas soluciones sean −5 y 9.

f) Un sistema de ecuaciones de primer grado que tenga como solución 3 y 8.

4. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. En los casos donde no coincidan, justifícalas o pregunta a tus compañeros cómo fue que llegaron a esa respuesta. En caso de duda, pide el apoyo de tu profesor y con todo el grupo discútelas.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

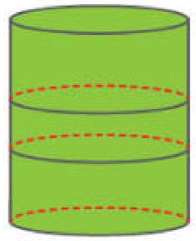
Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Formulo problemas a partir de una ecuación dada.			
Resuelvo problemas que involucran sistemas de ecuaciones.			
Resuelvo y planteo problemas que involucran el uso de ecuaciones lineales o cuadráticas.			

¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades?
¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumí para desarrollar el hábito del pensamiento racional?
Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:

Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

Cortes a un cilindro o a un cono recto

1. En el siguiente cilindro se han hecho cortes paralelos a su base.

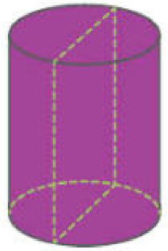


a) ¿Qué figura se obtiene al hacer los cortes señalados? ______

b) ¿Qué relación tiene la figura obtenida con la base del cilindro? ______

2. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y comenten qué sucede con las figuras obtenidas si se siguen haciendo cortes paralelos a la base del cilindro.

3. En el siguiente cilindro se hicieron cortes perpendiculares a la base.



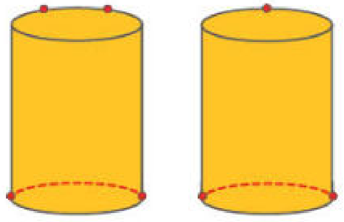
a) ¿Qué figura se obtiene al hacer los cortes señalados? ______

b) Si el corte pasa por el centro de la base, ¿qué relación guardan las dimensiones del cilindro con las de la figura que se obtuvo al realizar el corte?

c) Si se continúan haciendo cortes que sean paralelos entre sí y perpendiculares a la base del cilindro, ¿qué diferencias habrá entre las figuras obtenidas? ______

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Asigna dimensiones al cilindro y obtén el perímetro y área de la figura que se obtiene al hacer el corte que pasa por el centro de la base del cilindro. ______

5. En los siguientes cilindros se indican los puntos por donde debe pasar el corte, el cual es oblicuo a la base. Si lo requieres, puedes utilizar cilindros de unicel, plastilina o de algún otro material que se pueda cortar.



Programa

Eje: *Forma, espacio y medida*
Tema: *Medida*
Contenido: *Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.*

Al margen
Al encender una linterna se crea un cono de luz. Cuando éste se apunta hacia una pared, la figura producida por esta intersección es una sección cónica. Si apuntamos el haz de luz de manera perpendicular a la pared, obtendremos un círculo; inclinando el haz de luz, una elipse.

¿Qué se observará si inclinas aún más el haz de luz?

a) ¿Qué figura se obtiene al hacer el corte en el cilindro *A*? ¿Qué figura se obtiene en el cilindro *B*? ______________________________

b) Si el punto que se ubica en la tapa del cilindro *B* se desplaza a otro punto de la circunferencia y se realiza el corte, ¿se obtiene la misma figura? ¿Qué relación habrá entre la figura obtenida y la que se obtuvo anteriormente? Justifica tus respuestas. ______________________________

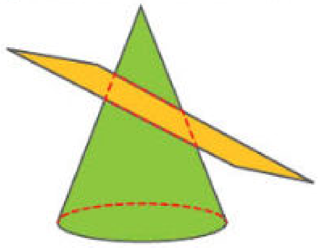
____

6. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y analiza qué figura se obtendrá si se realiza un corte oblicuo a la base, sin que pase por ella.

Reúnanse en equipos de cuatro integrantes. Para resolver las actividades pueden utilizar conos de unicel o plastilina.

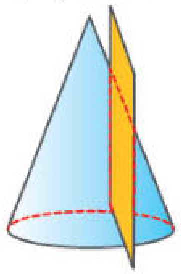
1. En cada uno de los siguientes conos realicen un corte, según se indica. En el recuadro, tracen la figura que se obtiene al hacer el corte y sobre la línea escriban el nombre.

a) Corte oblicuo a la base.



____

b) Corte perpendicular a la base.

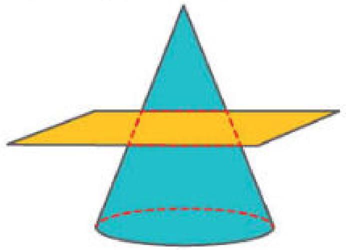


____

c) Corte paralelo a la generatriz.

____

d) Corte paralelo a la base.



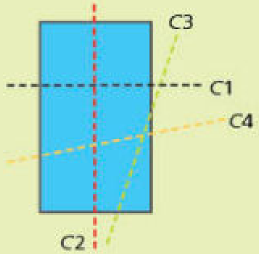
____

2. Comparen sus resultados con los de otros equipos y describan si es posible realizar un corte diferente, y menciona la figura que se obtiene.

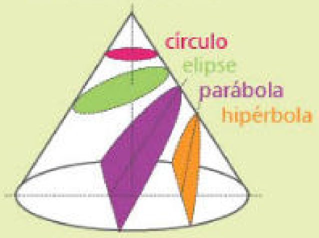
Para avanzar

Al realizar cortes en un cilindro recto se obtienen secciones diferentes, dependiendo de la orientación que tengan dichos cortes. En la siguiente figura se observa la imagen plana de un cilindro y los diferentes cortes que se hacen en él.

- ¿Qué secciones se obtienen al hacer los cortes señalados? Coméntalo con tus compañeros.



- Al hacer cortes rectos a un cono se obtienen, según la orientación, diferentes secciones:



- Comenta con tus compañeros la definición de círculo, elipse, parábola e hipérbola y argumenten qué tipo de corte se hace para obtener cada una de ellas.

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas, explicando por qué piensan así:

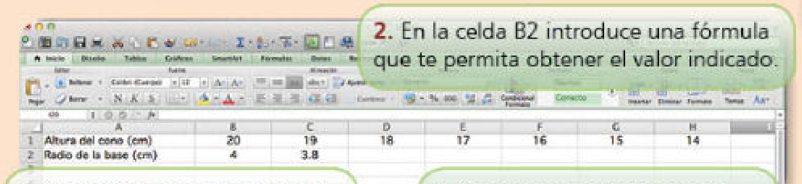
1. ¿Logró realizar los cortes solicitados a cada uno de los conos?
2. ¿Identificó las figuras que se obtienen al hacer cortes rectos a un cono?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros?
4. ¿Qué aspectos de su participación deben mejorar?

Tecnología

Analiza el siguiente problema y, con la ayuda de una hoja de cálculo, responde las preguntas que se plantean.

1. Un cono mide 20 cm de altura y 4 cm de radio en la base. La tabla muestra la relación de la altura del cono con respecto al radio de la base que se va obteniendo al hacer cortes paralelos, con un centímetro entre uno y otro.

2. En la celda B2 introduce una fórmula que te permita obtener el valor indicado.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Altura del cono (cm)	20	19	18	17	16	15	14
2	Radio de la base (cm)	4	3.8					

3. Continúa los valores de la altura del cono hasta cero y obtén los valores del radio de la base.

4. Selecciona los valores de la tabla y de la opción Insertar, selecciona el *Gráfico de Dispersión*.

Tecnología

a) ¿Qué relación observas respecto a la medida del radio de la base conforme la altura del cono va disminuyendo? ____________

b) ¿Qué tipo de relación hay entre la altura y el radio? ¿Qué tipo de gráfica se obtiene? Justifica tus respuestas. ____________

c) Describe el procedimiento que permite obtener el valor del radio cuando la altura del cono disminuye. ____________

5. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y con la ayuda de tu profesor identifica aquellas en las que encuentres diferencias. Aporta justificaciones que permitan llegar a acuerdos.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

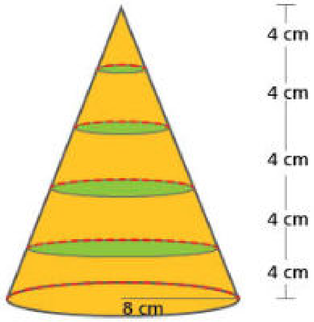
Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Hago cortes de manera correcta a un cilindro y a un cono recto.			
Analizo las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro y a un cono recto.			
Calculo las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.			

¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades?
¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño?
¿Cómo demostré disposición para el estudio de los contenidos de esta lección?
Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:

Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

1. El radio de la base de un cono mide 8 cm, en tanto que su altura mide 20 cm. Se hacen cortes paralelos a la base, como se indica en la siguiente figura. Completa la tabla y contesta las preguntas.

Círculo	Distancia del vértice superior a la sección de corte	Radio del círculo de la sección de corte	Área del círculo de la sección de corte
1			
2			
3			
4			



a) ¿Son proporcionales las cantidades de la segunda columna con respecto a las de la tercera columna? Justifica tu respuesta. ____________

b) ¿Son proporcionales las cantidades de la tercera columna con respecto a las de la cuarta columna? Justifica tu respuesta. ____________

2. Llena con agua un cono, como se observa en la figura.

a) ¿Qué forma se genera por la intersección de la superficie del agua con las paredes del cono? ____________

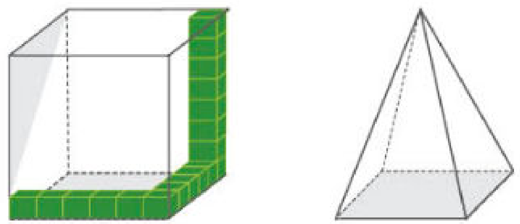
3. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y en caso de que tengas alguna duda, revisa las actividades de la lección.

Volumen del cilindro y del cono

Las formas cilíndricas y cónicas se encuentran en el hogar, la industria, la arquitectura y, en general, en muchos objetos que nos rodean. Su aplicación se puede apreciar tanto en un recipiente, como en las grandes construcciones.

El volumen de un contenedor es el número de unidades cúbicas que caben en él. Una unidad cúbica (u^3) es igual a un cubo cuya arista mide 1 u.

1. Los siguientes cuerpos geométricos tienen la misma medida de la base y de la altura.



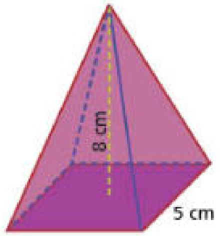
a) ¿Cuál es el volumen del prisma cuadrangular? ____________

b) ¿Cuál es la altura de la pirámide? ____________

c) ¿Cuál es el área de su base? ____________

d) ¿Cuál es el volumen de la pirámide? ____________

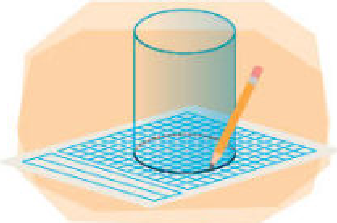
2. Se tiene un prisma con la misma base y altura que la pirámide de la derecha, ¿cuál es su volumen? ____________



3. Reúnete con un compañero y compara tus respuestas. Comenta cómo se calcula el volumen de un prisma y el volumen de una pirámide.

4. Analiza el siguiente problema y contesta las preguntas.

Raúl coloca un recipiente de forma cilíndrica sobre una hoja de papel cuadriculado, como se muestra en la imagen y con un lápiz traza la base del cilindro.



Programa

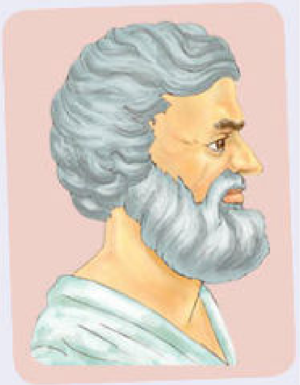
Eje: *Forma, espacio y medida*
Tema: *Medida*
Contenido:
Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.

Al margen

Demócrito de Abdera nació en Grecia. Aunque es más conocido por su Teoría Atómica, fue un excelente geómetra. Escribió varios tratados de geometría y astronomía, además de encontrar la expresión

$V = \frac{B \times h}{3}$

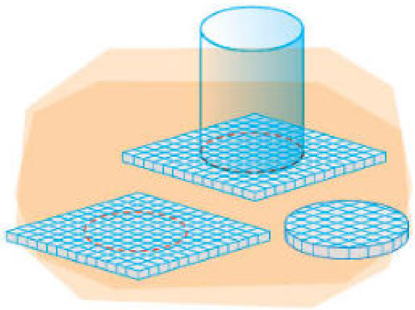
¿Sabes para qué se utiliza esta fórmula?
¿Qué representa cada una de las literales y el número tres?



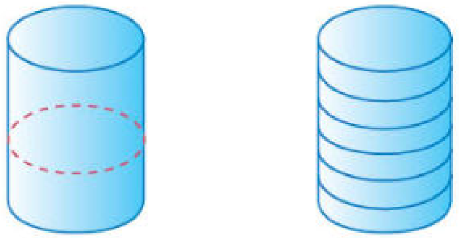
Demócrito de Abdera (460-370 a.n.e.)

a) ¿Cuántas unidades cuadradas (u^2), aproximadamente, tiene la base del cilindro? ______

b) Si la base circular del cilindro se dibuja sobre una base formada por cubos de 1 u^3 y se recorta para obtener una capa como la que se indica en la secuencia de imágenes, ¿cuántas unidades cúbicas (volumen) hay en esa capa del cilindro? ______

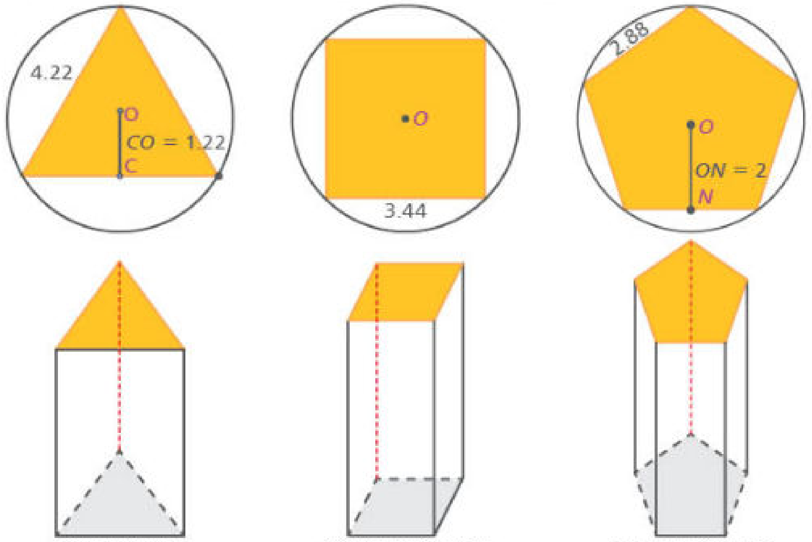


c) Si Raúl repite el proceso y obtiene todas las capas que se muestran en la siguiente ilustración, ¿cuántas capas de cubos se tuvieron que recortar para completar el cilindro? ¿Cuántas unidades cúbicas tendrá en total el cilindro? ______



d) Valida tu respuesta con las de otros compañeros.

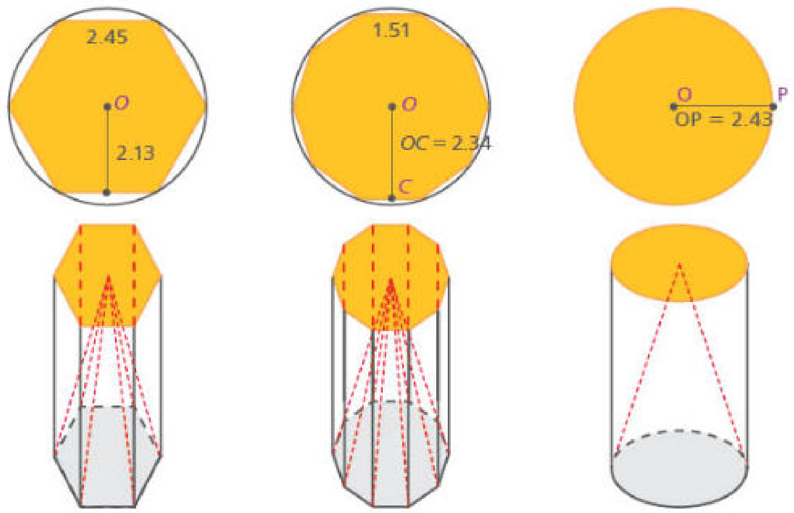
5. Reúnete con dos compañeros y analiza los siguientes cuerpos geométricos. Las primeras figuras corresponden a las vistas desde arriba de los prismas y del cilindro. Las medidas son en centímetros.



Prisma triangular Altura = 10 cm

Prisma cuadrangular Altura = 10 cm

Prisma pentagonal Altura = 10 cm



Prisma hexagonal Altura = 10 cm

Prisma decagonal Altura = 10 cm

Cilindro Altura = 10 cm

a) ¿Qué cuerpo geométrico tiende a ser un prisma conforme aumenta el número de lados de su base? ______

b) ¿Cuál es el volumen de cada uno de los prismas? Utilicen su calculadora.

______

c) ¿Cuál es el volumen del cilindro? ______

d) Escribe una regla general para calcular el volumen de un cilindro.

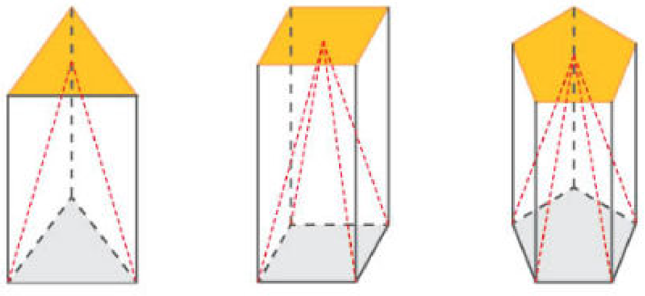
______

e) Compara tus respuestas con las de los demás equipos. Luego, responde: ¿Cuál es la fórmula para calcular el área de la base de un cilindro? ¿Cuál es la fórmula para calcular el volumen del cualquier cilindro?

______

______

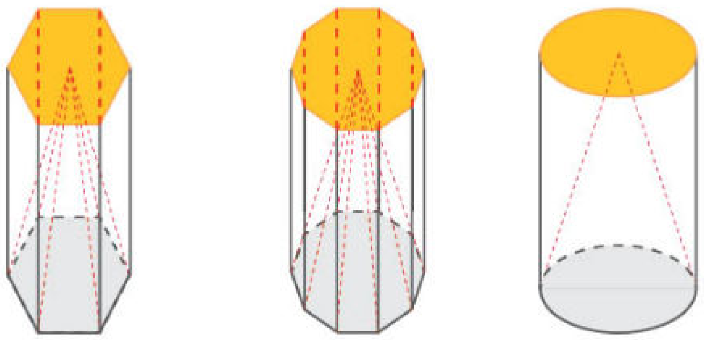
6. Reúnete con un compañero y analiza los siguientes cuerpos geométricos. Luego, responde lo que te pregunta. Utiliza tu calculadora.



Prisma triangular Altura = 10 cm

Prisma cuadrangular Altura = 10 cm

Prisma pentagonal Altura = 10 cm



Prisma hexagonal
Altura = 10 cm

Prisma decagonal
Altura = 10 cm

Cilindro
Altura = 10 cm

a) ¿Qué cuerpo geométrico tiende a ser una pirámide conforme aumenta el número de lados de la base? ____________________

b) El volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma con la misma base y altura, ¿el volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro? Justifica tu respuesta. ____________________

c) A partir de lo anterior, escribe una regla general para calcular el volumen de cualquier cono. ____________________

d) Compara su regla general con la de otros compañeros. Luego, discute: ¿Cómo se calcula el área de la base del cono? ¿Tres veces el volumen del cono es igual al volumen del cilindro?

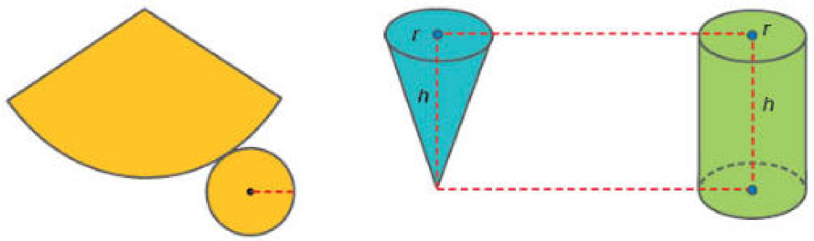
En equipo

Por ternas realicen esta actividad.

Materiales: cuatro recipientes cilíndricos de diferentes tamaños, arena o algún tipo de grano, cartulina, instrumento para medir y cinta adhesiva.

1. Midan el radio de la base y la altura de cada uno de los recipientes cilíndricos.

2. Con cartulina, construyan conos circulares rectos cuyos radios de las bases y alturas sean iguales a las longitudes de los recipientes, como se muestra en la figura.



3. Tomen uno de los conos y llénenlo con arena. Vacíenlo en el recipiente cuyo radio de la base y altura sean iguales a las del cono.

4. Repitan este procedimiento tantas veces como sea necesario hasta llenar el recipiente.

a) ¿Cómo es el volumen del cilindro con respecto al del cono? Argumenten su respuesta. ____________________

b) Repitan los pasos anteriores para los demás recipientes y registren sus conclusiones en su cuaderno.

c) Escriban con sus palabras cómo se puede calcular el volumen del cono, después traten de establecer una fórmula que permita calcular el volumen de cualquier cono. ____________________

d) Comenten sus respuestas con los demás equipos.

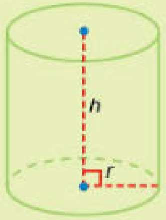
Para avanzar

Analicen la siguiente información y compárenla con las fórmulas que escribieron anteriormente.

- Volumen de un cilindro circular recto.

  Si un cilindro circular recto tiene altura h y el radio de su base es igual a r, entonces el volumen V está dado por la fórmula:

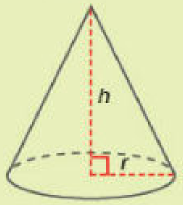
  $$V = \pi r^2 h$$



- Volumen de un cono circular recto.

  Si un cono circular recto tiene una altura h y el radio circular de su base es r, entonces el volumen V se obtiene por medio de la fórmula:

  $$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en determinar experimentalmente la relación entre el volumen de un cono y un cilindro si tienen la misma base y altura?
2. ¿Verificó con otros equipos sus respuestas y procedimientos?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de otros compañeros?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su compañero, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

Tecnología

1. Por medio de la hoja de cálculo obtén el volumen de un cono y de un cilindro. Observarás la relación entre ambos sólidos geométricos.

   a) Copia en una hoja de cálculo la siguiente tabla.

	A	B	C	D	E	F
1	Cilindro			Cono		Relación entre los volúmenes
2	radio de la base			radio de la base		
3	altura			altura		
4	volumen			volumen		

Tecnología

b) En la celda E2 escribe la fórmula =B2, y en la celda E3, la fórmula =B3. De esta manera, el valor que escribas para el radio de la base del cilindro será el mismo que para el radio de la base del cono. A su vez, la altura del cilindro será la misma que la del cono.

c) En la celda B2 escribe un valor para el radio de la base del cilindro, y en la celda B3, para la altura. Si $\pi \approx 3.1416$, ¿qué fórmula debes escribir en la celda B4 para obtener el volumen del cilindro? ¿Y qué fórmula debes escribir en la celda E4 para obtener el volumen del cono? ______

______

d) Si en la celda F2 escribes la fórmula $= \frac{B4}{E4}$, ¿qué resultado obtienes?

2. Compara tus respuestas con las de otros compañeros.

Valoración personal

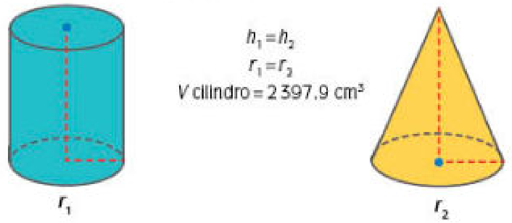
Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Reconozco la relación entre el volumen de un prisma y una pirámide cuando tienen la misma base y altura.			
Reconozco la relación entre el volumen de un cilindro y un cono cuando tienen la misma base y altura.			
Identifico cuál es la fórmula para calcular el volumen de un cilindro y cuál para el de un cono.			
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades? ¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño? ¿Qué actitudes asumí para desarrollar el pensamiento racional? Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:			

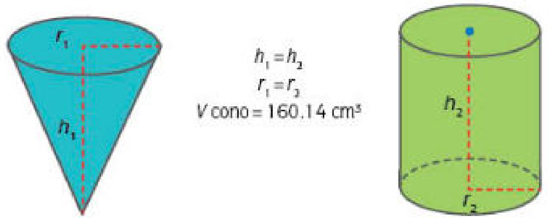
Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

1. Obtén lo que se pide en cada caso.

a) Calcula el volumen del cono.



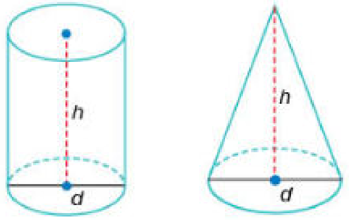
b) Calcula el volumen del cilindro.



2. Completa la siguiente tabla como se indica: dado el volumen de un cilindro en el primer renglón, obtén en el segundo renglón, el volumen de un cono de igual radio de la base y altura. O bien, dado el volumen de un cono, calcula el volumen de un cilindro de igual radio de la base y altura.

Volumen del cilindro (cm³)	113			602.88	31.4	
Volumen del cono (cm³)		84.78	113.04			94.2

3. El cilindro y el cono tienen la misma altura y el mismo diámetro de sus bases. ¿Cuál es el volumen del cilindro, si el cono tiene un volumen de 75.36 cm³? ______



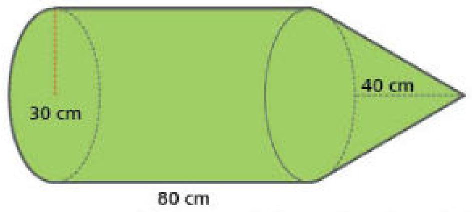
Estimar y calcular el volumen de cilindros y conos

Programa

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Medida
Contenido: Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

Es común que los fabricantes indiquen la capacidad que tienen los objetos, por ejemplo la de una cubeta. Pero para calcular el radio de su base a partir de su volumen necesitamos trabajar con la fórmula del volumen del cilindro, a fin de despejar el valor del radio.

1. Analiza la siguiente figura que representa el modelo a escala de la parte principal de un submarino y contesta las preguntas.



a) ¿De qué cuerpos geométricos está formado el modelo? ______

b) ¿Cuál es el volumen del modelo? ¿Cómo lo calculaste? Comenta tu estrategia en grupo.

c) ¿Cómo duplicarías el volumen del modelo, manteniendo constantes la altura y el radio del cono? Argumenta tu respuesta. ______

d) Si cada centímetro del modelo representa 1.5 m del submarino real, ¿cuáles son las dimensiones del submarino real? Justifica tu respuesta.

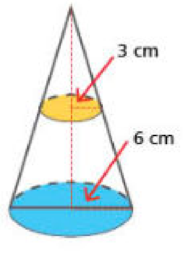
______

e) ¿Cuál es el volumen real del submarino? ¿Cómo lo calculaste? ______

f) ¿Cuántos metros cuadrados de lámina de acero se necesitan para recubrir el submarino? Explica el procedimiento que empleaste para obtener tu respuesta.

g) Compara tus respuestas con las de otros compañeros.

2. El cono de la derecha fue seccionado en dos partes por el corte de color amarillo que se realizó de manera paralela a su base. Si el volumen del cono completo es de 301.59 cm³, obtén los siguientes datos y contesta las preguntas de la página siguiente. (Considera $\pi = 3.14$).



Al margen

Las ruedas más antiguas que se conocen hasta ahora se construyeron en Sumeria, entre los años 3500 y 3000 a.n.e. La forma original de esas ruedas era la de un disco de madera obtenido de un tronco de árbol cortado en forma parecida a la de un cilindro. Tanto los egipcios como los incas en América del Sur utilizaron troncos de árboles para transportar grandes piedras. ¿Consideras que puede existir otro tipo de figuras capaces de rodar que no sean de forma circular? Investiga al respecto.

Rueda antigua.

a) ¿En qué cuerpos seccionó al cono el corte amarillo? ______

b) Escribe la fórmula para obtener el volumen del cono y sustituye en ella los valores que conoces. ______

c) A partir de la expresión anterior, ¿cómo obtienes el valor de la altura del cono? ______

d) Con base en el valor que obtuviste, ¿cuánto mide la altura de cada una de las piezas en que se dividió el cono? ______

e) ¿Cuál es el volumen de la pieza superior en que se dividió el cono?

______

f) ¿Cuál es el volumen de la pieza inferior en que se dividió el cono?

______

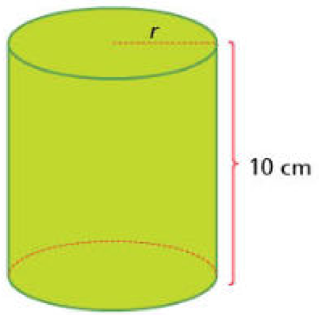
g) Compara tus respuestas con las de tus demás compañeros.

3. El volumen del siguiente cuerpo es 785.40 cm^3 y su altura es 10 cm. Con base en estos datos contesta las preguntas.

a) En la fórmula para calcular el volumen de un cilindro recto, ¿qué datos pueden variar? ______

b) De esos datos, en este caso, ¿cuáles conoces y cuáles desconoces?

______



c) Sustituye en la fórmula los valores que conoces. ______

d) Obtén el valor del dato que se desconoce. ______

e) ¿Cuántos datos de la fórmula para obtener el volumen de un cilindro recto necesitas como mínimo para obtener los restantes? ______

f) Escribe una fórmula con la cual puedas obtener el radio de la base de un cilindro del cual conoces su volumen y su altura. ______

g) Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

4. En una fábrica se producen discos para pesas. Para venderlos se elaboran cajas cilíndricas de diferentes tamaños, según el peso y el tamaño de los discos.

En la siguiente tabla se muestran las características de algunos de los diferentes tipos de discos que se producen. Cada disco tiene en el centro un orificio de 3 cm de radio.

Peso (kg)	Diámetro de la base (cm)	Alto (cm)	Volumen (cm^3)
20	15	4	
30	22	7	
50	35	18	

a) ¿Cuál es el volumen de los discos? ______

b) Si se quieren guardar cuatro discos de 30 kg en una caja circular, ¿cuáles deben ser, como mínimo, el radio, la altura y el volumen de la caja?

______

c) Si en una caja cilíndrica con un volumen de 2 119.5 cm^3 se guardan tres discos, ¿cuál es el peso de los discos que se pueden guardar en la caja? ¿Cuánto mide el radio de la base de la caja y cuánto su altura?

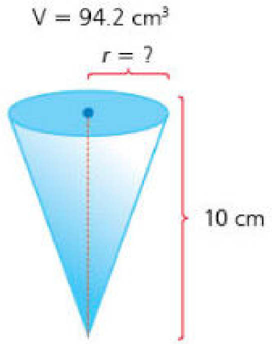
______

5. En la oficina de Jessica hay un despachador de agua y para servirse ocupan conos de papel, como el que se muestra en el dibujo.

a) Si el volumen de cada cono es de 94.2 cm^3 y su altura es de 10 cm, ¿cuál es el radio de su base? ______

b) Si 1 litro equivale a 1 000 cm^3, ¿cuántos conos, aproximadamente, tendrías que llenar para consumir un litro de agua?

______



c) Si un garrafón contiene 20 litros de agua, ¿cuántos conos se pueden llenar? ______

d) Suponiendo que el garrafón de agua fuera un cilindro de radio igual a 13 cm, ¿cuánto mediría, aproximadamente, su altura? Justifica tu respuesta. ______

e) Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

Sólido es un objeto en el espacio que tiene volumen y superficie.
Litro es equivalente a un decímetro cúbico (1 dm^3).

Recuerda que...

Las siguientes son unidades de volumen:

milímetro cúbico	mm^3
centímetro cúbico	cm^3
decímetro cúbico	dm^3
metro cúbico	m^3
kilómetro cúbico	km^3

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Colaboró en la resolución de los problemas?
2. ¿Comparó con otros equipos sus respuestas?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros en la discusión acerca de los procedimientos que utilizaron?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su pareja, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

Cuando un sólido no tiene una forma geométrica que permita calcular su volumen por medio de fórmulas, se puede calcular éste por medio del volumen desplazado de agua. Para calcular el volumen de una piedra pequeña, que por lo general tienen una forma muy irregular, realicen lo siguiente.

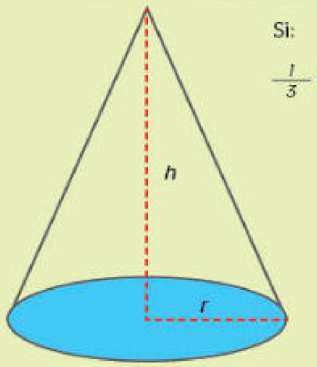
1. Necesitan un recipiente graduado, donde verterán agua y después sumergirán el sólido cuyo volumen desean conocer. El aumento de nivel del líquido les permitirá determinar el volumen del sólido como se muestra en la figura.

Registrar el nivel del agua antes de introducir el objeto.

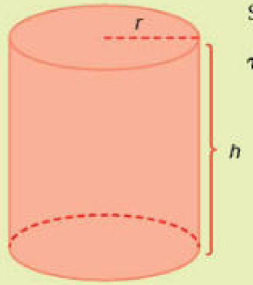
2. Elijan un objeto de forma irregular que no flote, que no se disuelva en agua y que además no sea muy pequeño, puede ser una piedra. Sumérjanlo.
   a) ¿Cómo pueden saber la cantidad de agua que desplazó el objeto sumergido? ______________________
   b) ¿Qué volumen ocupa un 1 ml de agua en 2 cm^3? ____________
   c) Si el cuerpo que sumergieron hace que el nivel del agua suba de 120 a 135 ml, ¿cuál es su volumen? ____________
   d) Si el nivel del agua está en 1 litro y el objeto a sumergir tiene un volumen de 57 cm^3, ¿qué nivel alcanzará el agua? ____________
   e) ¿Cuál es el volumen de un huevo de gallina promedio? ____________
   f) Comparen sus respuestas con las de otras parejas.

Para avanzar

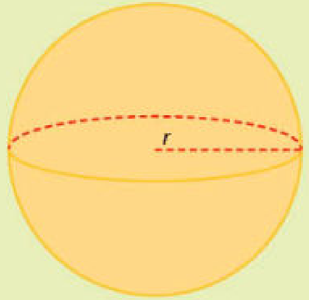
En muchas ocasiones, al trabajar con objetos como el cono, el cilindro o la esfera, no necesariamente debemos obtener su volumen a partir de las medidas de sus dimensiones sustituyendo de manera directa en la fórmula correspondiente. Algunas veces se conoce el volumen, pero se desea calcular otra medida. Para este tipo de situaciones se deben manipular las fórmulas, es decir, se deben despejar las distintas variables que las conforman como se muestra a continuación.



Si:	Al despejar r:	Al despejar h:
$\frac{1}{3}\pi r^2h = V$	$\pi r^2h = 3V$	$\pi r^2 h = 3V$
	$r^2h = \frac{3V}{\pi}$	$r^2 h = \frac{3V}{\pi}$
	$r^2 = \frac{3V}{\pi h}$	$h = \frac{3V}{\pi r^2}$
	$r = \frac{3V}{\pi h}$	



Si:	Al despejar r:	Al despejar h:
$\pi r^2h = V$	$\pi r^2h = V$	$\pi r^2h = V$
	$r^2h = \frac{V}{\pi}$	$r^2h = \frac{V}{\pi}$
	$r^2 = \frac{V}{\pi h}$	$h = \frac{V}{\pi r^2}$
	$r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$	



Si:	Al despejar r:
$\frac{4}{3}\pi r^3h = V$	$4\pi r^3 = 3V$
	$4r^3 = \frac{3V}{\pi}$
	$r^3 = \frac{3V}{4\pi}$
	$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

Utilizamos estas expresiones en situaciones reales. Por ejemplo, algunos envases de jugos o refrescos sólo indican su capacidad, pero no sus medidas y es común que sea necesario conocerlas para fines prácticos. Aplica las fórmulas antes expuestas obteniendo el volumen de tres objetos que tengas en casa, uno con forma cónica, otro cilíndrico y un último con forma esférica, describe cada objeto y para realizar los cálculos estima las medidas necesarias lo más exactamente posible.

Uno de los personajes que más aportó al estudio de la geometría en la antigüedad griega fue Arquímedes de Siracusa, para quien una situación importante era la relación entre el volumen de un cilindro y el de una esfera inscrita en él. De hecho, en su tumba, a manera de epitafio, se colocó la imagen de una esfera inscrita en un cilindro.

Con ayuda de una hoja electrónica de cálculo conocerás en qué consiste esta propiedad.

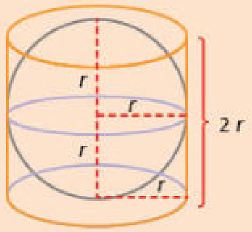
Tecnología

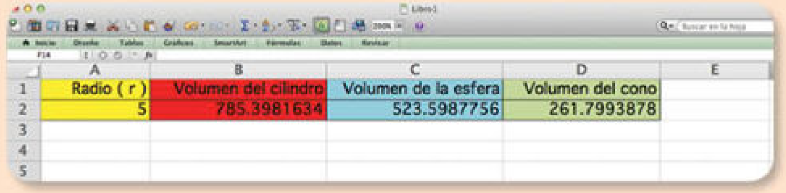
Tecnología

1. En el dibujo de abajo se esquematiza la situación anterior. Si el radio de la esfera y del cilindro es de 5 cm, contesta:

a) ¿Cuál es el volumen del cilindro?, ¿y el de la esfera? ______

b) ¿Qué fracción del volumen del cilindro es el de la esfera? ______





	A	B	C	D	E
1	Radio (r)	Volumen del cilindro	Volumen de la esfera	Volumen del cono	
2	5	785.3981634	523.5987756	261.7993878	
3					
4					
5					

2. Sigue las indicaciones en una hoja de cálculo y contesta las preguntas.

a) ¿Qué fórmula anotas en B2 para obtener el volumen del cilindro con base en la medida de *r* de la celda A2? ______

b) ¿Qué fórmula anotas en B2 para obtener el volumen de la esfera con base en la medida de *r* de la celda C2? ______

c) Cambia la medida de *r*, ¿qué sucede? ______

d) En la columna E anota una fórmula para obtener el cociente de las columnas C entre B; después, cambia los valores de *r*. Con base en lo anterior, ¿qué parte del volumen del cilindro es la esfera? ______

e) Si tienes un cono recto cuya base sea igual a la base del cilindro y también tiene su misma altura, ¿cuál es su volumen cuando *r* es igual a 1?, ¿cuál el volumen del cilindro?, ¿y cuál el de la esfera? ______

f) ¿Qué parte del volumen del cilindro es el volumen del cono? ______

g) En la columna F anota una fórmula que sume el volumen de la esfera y del cono, ¿qué observas? ______

h) ¿Qué puedes concluir acerca del volumen de un cilindro y el de una esfera inscrita en él? ______

i) Compara tus respuestas con las de tus demás compañeros.

¡A investigar!

Investiga en fuentes bibliográficas o en páginas de internet lo siguiente:

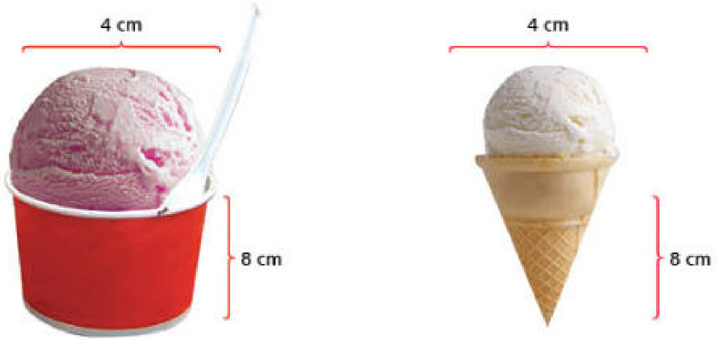
- ¿Qué es el principio de Cavalieri?
- ¿Qué relevancia tiene en el cálculo de volúmenes?
- ¿En qué consiste dicho principio?

Explica el principio anterior con un ejemplo.

1. Resuelve los siguientes problemas y contesta las preguntas:

a) Olga pide una bola de helado en cono y Óscar la pide en un vaso (cilíndrico). Tanto el vaso como el cono tienen 8 cm de alto y 4 cm de radio; además, cada bola de helado es una esfera de 4 cm de radio.

- Si Olga deja que se derrita su helado, ¿llenará completamente su cono? ______



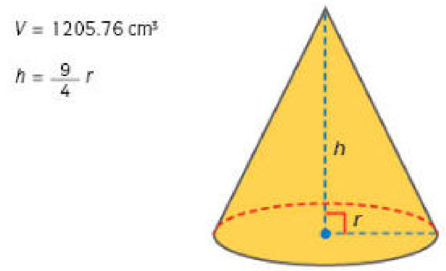
- Si Óscar deja que se derrita su helado, ¿llenará completamente su vaso? ______
- En cada caso, ¿cuánto les falta o les sobra? ______

b) Un cono de helado mide 3 cm de radio y 10 cm de alto. Si una bola de helado tiene forma de esfera de 3 cm de radio, ¿cuántas bolas de helado derretido del mismo tamaño caben en el cono? ______

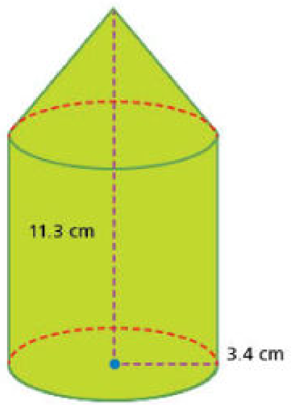
2. Resuelve los siguientes problemas.

a) El diámetro de un disco compacto es de 120 mm y su espesor, de 1.2 mm. ¿Cuál debe ser el volumen de una caja cilíndrica que contiene, exactamente, 100 discos compactos? ______

b) Si el volumen de un cono es de 1 205.76 cm³ y su altura es parte del radio, ¿cuál es el área de su base? ____________________



c) La altura total del siguiente un cuerpo cónico es de 11.3 cm y el radio de su base es de 3.4 cm. Si la altura del cono es de 5.5 cm, ¿cuál es el volumen del cuerpo? ____________________



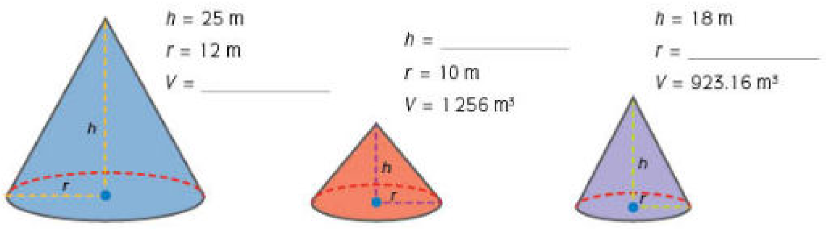
Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Calculo el volumen de cilindros y conos.			
Calculo el volumen de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.			
Anticipo cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.			
¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades? ¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño? ¿Qué actitudes asumí para desarrollar el hábito del pensamiento racional?			

Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

d) Calcula lo que se indica. ¿Cuál será el volumen de un cilindro que tenga igual radio de la base y altura? ____________________



3. Si dejaste pendientes algunas preguntas del Proyecto 5, retómalas y emplea tus conocimientos adquiridos hasta esta lección.

Variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades

Programa

Eje: *Manejo de la información*
Tema: *Proporcionalidad y funciones*
Contenido: *Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.*

1. Una compañía automotriz está probando un nuevo modelo de automóvil. Una de las pruebas consistió en un análisis de la distancia recorrida en relación con los litros de gasolina que consume, obteniendo los siguientes datos:

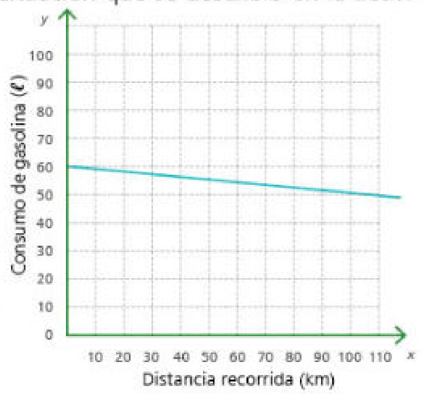
Distancia recorrida (km)	0	20	40	60	80	100	120	140
Consumo de gasolina (ℓ)	60	58	56	54	52	50	48	46

a) Si *C* representa la cantidad de gasolina que va quedando en el tanque del automóvil y *d* la distancia que recorre, ¿cuál es la expresión algebraica que modela esta situación? Justifica tu respuesta. ____________

b) Plantea una ecuación que permita calcular la distancia total que puede recorrer el automóvil con 60 litros de gasolina. ____________

c) Compara tus respuestas con las de tus compañeros y valídalas con los datos de la tabla.

2. La siguiente gráfica representa la situación que se describió en la actividad anterior:



a) ¿Cuántos litros de gasolina habrá consumido el automóvil al recorrer 180 kilómetros? Justifica tu respuesta. ____________

b) Describe la estrategia que utilizarías para determinar, a partir de la gráfica, el consumo de gasolina cuando el automóvil ha recorrido 65 kilómetros. ____________

c) ¿Cuántos kilómetros tendrá que recorrer el automóvil para consumir el total de gasolina? ____________

d) Compara tus respuestas con las de tus compañeros y relaciónalas con los valores de la tabla y las expresiones algebraicas obtenidas en la actividad anterior.

Al margen

Las ideas intuitivas de *funciones* son tan antiguas que se pueden encontrar en testimonios que fueron plasmados hace 2 000 años en tablillas de barro que tenían los babilonios y que muestran su conocimiento matemático. El primero en proporcionar una definición explícita de *función* fue Johann Bernoulli, en 1718. ¿Qué es una función y cómo se puede representar?

Johann Bernoulli.

3. Una cisterna con una capacidad de 10 500 litros se llena mediante un grifo que vierte 125 litros de agua por minuto. Completa la tabla y contesta.

Tiempo (min)	1		25		66
Cantidad de agua vertida (ℓ)		1 250		5 000	

a) ¿Qué cantidad de agua verterá el grifo en 13 minutos?, ¿y en media hora? Justifica tus respuestas. ______

b) ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que la cisterna tenga 8 750 litros?, ¿y para que se llene? ______

c) Si llamamos x a la capacidad de la cisterna y t al tiempo de llenado, ¿cuál es la expresión algebraica mediante la cual se determina el tiempo de llenado de la cisterna? ______

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que nos permite determinar la cantidad de agua en la cisterna? ______

e) Compara tus respuestas con las de tus compañeros y, en caso de observar diferencias compáralas con los valores de la tabla.

4. El dueño de un circo estima que si cobra $ 300.00 por entrada podría contar con 500 espectadores y que por cada $ 10.00 que baje en el precio, asistirían 100 espectadores más. Analiza la siguiente tabla y, a partir de ella, contesta las preguntas.

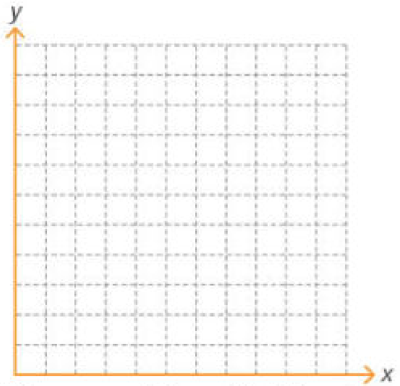
Descuento (pesos)	0	10	20	30	x
Precio	300	300 − 10	300 − 20	300 − 30	300 − x
Número de espectadores	500	500 + 100(1)	500 +100(2)	500 + 100(3)	500 + 100x
Ingresos	(300)(500)	(300 − 10) (500 + 100(1))	(300 − 20) (500 + 100(2))	(300 − 30) (500 + 100(3))	(300 − x) (500 + 100x)

a) ¿Qué representa el valor de x? ______

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación entre el descuento que se realiza al precio del boleto y los ingresos obtenidos? Justifica tu respuesta. ______

c) ¿De cuánto serán los ingresos obtenidos si el precio del boleto baja 50 %? Argumenta tu respuesta. ______

d) Construye la gráfica en donde relaciones el descuento que se realiza al precio del boleto, con los ingresos obtenidos.



e) Haz una descripción del tipo de gráfica que se obtiene. ¿Qué tipo de variación se presenta en la relación de los datos? Justifica tu respuesta. ______

f) Compara con tus compañeros tus respuestas y la gráfica. En caso de observar diferencias, valida las estrategias que llevaron a cabo. Finalmente, traza en tu cuaderno la gráfica que relacione el descuento que se hace al precio del boleto con el número de espectadores y analiza las diferencias con la gráfica anterior.

Reúnanse en equipos de cuatro integrantes para realizar las siguientes actividades.

1. Analicen cada una de las situaciones que se presentan a continuación e identifiquen las magnitudes involucradas y el tipo de variación que se presenta entre ellas: lineal o cuadrática.

a) Roberto tiene 5 años menos que Alejandro. Si se representa con y la edad de Roberto y con x la edad de Alejandro, ¿cuál es la expresión algebraica que relaciona los valores de x y y? ¿Qué tipo de variación se da en la relación de las cantidades? Justifiquen sus respuestas. ______

b) Seguramente has notado que el canto de un grillo no siempre es igual. Según algunos investigadores, el número de veces por minuto que un grillo emite este sonido depende de la temperatura del aire. La relación que une ambas magnitudes se representa con la expresión algebraica $7t - 30$, donde t es la temperatura en grados Celsius. ¿Cómo pueden calcular el número de veces que un grillo emite su sonido en un mi-

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas, explicando por qué piensan así:

1. ¿Identificó el tipo de relación, lineal o cuadrática, que se presenta en las situaciones analizadas?
2. ¿Determinó la expresión algebraica que representa cada una de las situaciones analizadas?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros?
4. ¿Qué aspectos de su participación deben mejorar?

nuto si la temperatura ambiente es de 30º C? ¿Cuál es la temperatura mínima con la cual el grillo puede cantar? Justifiquen sus respuestas.

c) Adriana sube a la parte alta de un edificio y deja caer una pelota. En el primer segundo la pelota recorre 4.9 m, en el segundo lleva recorridos 19.6 m y en el tercero 44.1 m. ¿Cuál es la expresión algebraica que permite calcular la distancia (*d*) en función del tiempo (*t*)? ¿Qué tipo de variación se da en la relación de las cantidades? Justifiquen sus respuestas.

d) Comparen sus respuestas con las de los demás equipos. De ser necesario, elaboren tablas que les permitan identificar el tipo de variación y la expresión algebraica que representa cada uno de los problemas. Analicen en qué casos se presenta una relación proporcional y qué diferencia se observa en la expresión algebraica con respecto a las que no lo son. Al abordar la sección de *Tecnología*, tracen la gráfica de cada una de estas relaciones.

¡A investigar!

Al relacionarse dos conjuntos de cantidades, se puede observar entre ellas una variación cuadrática. Ingresa a la dirección electrónica: http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L2_T1_text_final_es.html (Consulta: el 13 de enero de 2017).

Partiendo del análisis de la información que contiene la página, contesta lo siguiente:

- ¿Qué aplicaciones tienen las funciones cuadráticas?
- ¿Qué se puede describir mediante una parábola?
- Con el apoyo de tu profesor y de tus compañeros, analiza y resuelve el problema sobre el lanzador de peso. Presenta y comenta tus resultados ante el grupo.
- Analiza el problema referente al campo de una granjera. Resuélvelo, y antes de revisar la respuesta, comparte tu estrategia con tus compañeros.

Revisa el resto del contenido de la página y, con el apoyo de tu profesor, resuelve algún otro problema que te permita consolidar el contenido de la lección.

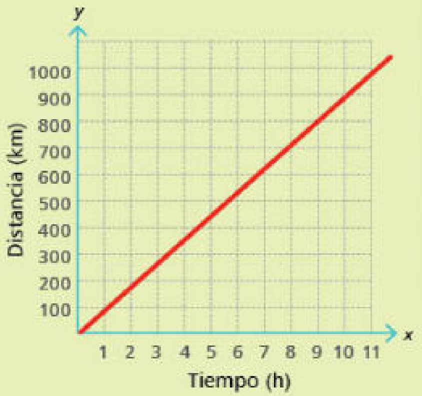
Para avanzar

Al relacionarse dos conjuntos de cantidades se puede observar, entre otras, una variación lineal o cuadrática. Dicha relación se puede representar a través de una tabla o una gráfica y modelarse mediante una expresión algebraica.

1. Un autobús se desplaza a una velocidad constante. En la siguiente tabla se registran algunas distancias recorridas y sus correspondientes tiempos.

Tiempo (h)	Distancia (km)
1	90
2	180
3	270
4	360
5	450
6	540

Expresión algebraica: $y = 90x$

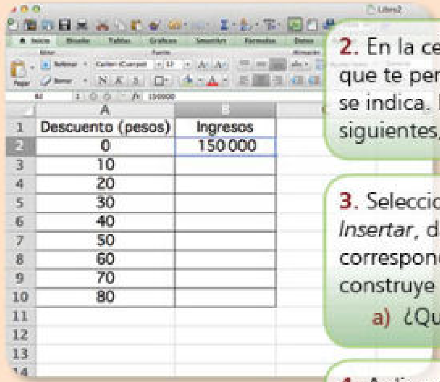


a) ¿Se establece una relación proporcional entre los dos conjuntos de cantidades? Argumenta tu respuesta.

b) A partir de la expresión $y = 3x^2 + 2$, elabora la tabla y traza la gráfica correspondiente.

Tecnología

1. Utiliza una hoja electrónica de cálculo para construir la gráfica de la actividad 4 de la sección *Piensa y comenta*, referente a los ingresos que se obtienen en un circo, dependiendo del descuento que se haga al costo de la entrada.



2. En la celda B3 introduce la fórmula que te permite obtener el valor que ahí se indica. Después, cópiala en las celdas siguientes, de B4 a B11.
3. Selecciona la tabla y, en la opción de *Insertar*, da clic en el botón *Dispersión*, correspondiente a *Gráficos*; con ello, se construye la gráfica del problema.
   a) ¿Qué tipo de gráfica obtienes?
4. Aplica el mismo procedimiento para obtener las gráficas de las situaciones que trabajaste en la sección *En equipo*. Para ello, modifica los valores de la tabla.
5. Compara tus gráficas con las obtenidas por tus compañeros.

1. El euro es la moneda que a partir del 1 de enero de 2002 circula en algunos países de Europa. El tipo de cambio que se publicó en el periódico *Excélsior* el 3 de mayo de 2013 fue de $ 15.85 por cada euro.

   a) ¿Cuánto se pagó, en pesos, si se adquirieron 235 euros? ___________

   b) ¿Cuántos euros se pudieron comprar con $ 4 700.00 pesos? ___________

   c) ¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona el total de pesos pagados (p) con la cantidad de euros (e) comprados? Representa mediante una tabla y una gráfica esta situación.

2. Completa la siguiente tabla que muestra la relación entre el lado de un cuadrado, su perímetro y su área.

Lado del cuadrado (cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Perímetro (cm)												
Área (cm^2)												

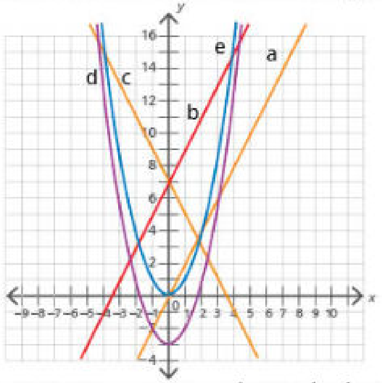
   a) ¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona el perímetro (*y*) del cuadrado en función de la longitud de su lado (*x*)? ¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona el área (*y*) del cuadrado en función de la longitud de su lado (*x*)? ___________

   b) Utiliza las expresiones algebraicas anteriores para obtener el perímetro y el área de un cuadrado que mide 35 cm de lado. ___________

   c) Traza en tu cuaderno dos gráficas, una donde se muestre la variación del perímetro con respecto a la variación del lado, y otra para la variación del área con respecto a la variación del lado.

3. Completa la tabla, relacionando cada una de las funciones con su respectiva gráfica.

Función	Gráfica
$y = x^2$	
$y = 2x$	
$y = 2x + 7$	
$y = x^2 - 3$	
$y = -2x + 7$	



4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y con la ayuda de tu profesor, revisa las actividades en que presenten dudas.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Relaciono dos conjuntos de datos que guardan una relación lineal o cuadrática.			
Determino la expresión algebraica que modela las situaciones analizadas.			
Analizo variaciones lineales y cuadráticas representadas mediante una expresión algebraica, una tabla o una gráfica.			

¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades?
¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño?
¿Cómo demostré disposición para el estudio de los contenidos de esta lección?
Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:

Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

Eventos equiprobables y no equiprobables

Los alumnos de tercer grado se organizan en parejas y realizan el siguiente juego: lanzan dos monedas al mismo tiempo.

- La pareja A elige el evento "sol, sol"; la pareja B elige los demás eventos.
- Cada pareja lanza por turnos las dos monedas. Cuando las dos caen sol, la pareja A avanza una casilla. Cuando caen en cualquier otro resultado, la pareja B avanza una.

1. Formen parejas y jueguen a lanzar las monedas. En cada lanzamiento coloquen una ✘ en la casilla de la pareja que avanza. Gana la pareja que llegue primero a la meta.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Meta
Pareja A										
Pareja B										

   a) ¿Qué pareja creen que ganará el juego? ¿Por qué?

   b) Ahora, la pareja B escogerá el evento "sol, sol"; la otra, los demás eventos. Las reglas del juego siguen siendo las mismas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Meta
Pareja A										
Pareja B										

   c) Repitan el juego dos veces más y registren en la siguiente tabla los resultados que se presentan en cada lanzamiento. Utilicen una tabla para cada juego.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Meta
Pareja A										
Pareja B										

2. Según los resultados del último juego contesten las preguntas.

   a) ¿Qué pareja ganó más juegos? ___________

   b) ¿Cuántos resultados diferentes se pueden presentar en este juego? ¿Cuáles son? ___________

   c) ¿Es justo este juego? Justifiquen su respuesta. ___________

   d) ¿Qué probabilidad tiene de ganar la pareja que escoge "sol, sol"? ___________

Programa

Eje: *Manejo de la información*
Tema: *Nociones de probabilidad*
Contenido: *Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.*

Al margen

Ciertas combinaciones de dados fueron calculadas por Gerolamo Cardano y por Galileo Galilei. Cardano, en su obra *Lanzando los dados*, introduce conceptos de combinatoria en cálculos de probabilidad y define la probabilidad como el número de resultados favorables dividido entre el número de posibles resultados.

Por ejemplo:
Sea el experimento de lanzar dos dados y el evento de que la suma de las caras sea 10.

¿Cuáles son los resultados posibles?
¿Cuáles son los resultados favorables?
¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 10?

e) ¿Qué probabilidad tiene de ganar la pareja que escogió los eventos diferentes a "sol, sol"? ____________

f) ¿Qué asignación de resultados da un juego justo entre las dos parejas? Argumenta su respuesta. ____________

____

3. Comparen sus respuestas con las de su grupo. Luego, en su cuaderno respondan las siguientes preguntas: ¿Cuáles son los casos posibles del experimento de lanzar dos monedas? ¿Qué condiciones se deben cumplir para que un juego sea justo? ¿Qué adecuaciones le harían al juego para que haya la misma probabilidad de ganar?

1. En equipos de seis integrantes jueguen lo siguiente.

Carrera de caballos

Reglas del juego:

- Cada participante elige uno de los caballos del tablero de carreras.
- Colocar una marca o ficha en su posición en el tablero, según el número del caballo elegido.
- Cada jugador lanza por turnos un dado; avanzará una casilla el caballo cuya ubicación en el tablero se corresponda con el número de puntos que resultó al caer el dado.

a) ¿Es posible predecir qué caballo llegará primero a la meta? ____________ ¿Por qué? ____________

b) Realicen 10 veces el juego y registren los resultados en su cuaderno.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										META
4										
5										
6										

2. Después de jugar 10 veces, respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Qué caballo ganó más veces la carrera? ____________

b) ¿Qué caballo(s) quedó (quedaron) más veces en segundo lugar? ____________

c) ¿Existe la posibilidad de que gane la carrera el caballo con el número 5? ________ ¿Y el caballo 1? ¿Por qué? ____________

d) ¿Creen que algún caballo tiene mayor probabilidad de ganar la carrera? ¿Por qué? ____________

3. Ahora, jueguen con dos dados, pueden elegir otro caballo o continuar jugando con el mismo, por turnos van a lanzar dos dados al mismo tiempo. El resultado de la suma de los puntos que obtengan al caer ambos dados boca arriba indicará el número de caballo que debe avanzar una posición, la que se va registrando con un punto en la casilla. Gana el primero que llegue a la meta.

4. Después de jugar, respondan lo siguiente.

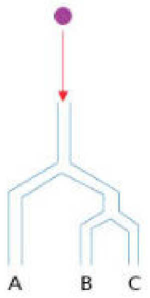
a) ¿Qué número de caballo no conviene elegir? ¿Por qué? ____________

b) ¿Qué caballo(s) tiene(n) mayor posibilidad de ganar la carrera? ¿Por qué? ____________

c) ¿Existe la posibilidad de que el caballo con el número 1 gane la carrera? ¿Por qué? ____________

5. Analicen la situación y respondan lo que se pregunta.

Adriana y sus dos hermanos nunca se ponen de acuerdo para ver la televisión. Con el fin de evitar conflictos, Adriana les propone tomar esta decisión mediante un juego que consiste en dejar caer una canica dentro de un dispositivo como el que se muestra.



Los hermanos acuerdan que si la canica sale por A, Adriana elegirá qué programa ver; Beatriz elegirá si sale por B y si sale por C, Carlos será quien que elija.

Coevaluación

Intercambien su libro con alguno de sus compañeros y respondan las siguientes preguntas explicando por qué piensan así:

1. ¿Participó en los juegos y colaboró en dar respuestas a a las distintas preguntas?
2. ¿Verificó con otros equipos sus respuestas y procedimientos?
3. ¿Escuchó con atención y respeto la intervención de otros compañeros?
4. Después de revisar la evaluación que realizó su compañero, contesten: ¿cuáles aspectos de su participación deben mejorar? Considérenlo en el siguiente trabajo en equipo.

a) ¿Creen que el juego es justo o que alguien tiene ventaja?

b) Si consideran que no es justo, ¿cómo debería ser el dispositivo del juego para que sea justo? Dibújalo.

c) Comparen sus respuestas con las de otros equipos y comenten qué es necesario verificar en un juego de azar para determinar si es justo o no. Luego, respondan la siguiente pregunta. ¿Qué adecuaciones le harían a la carrera de caballos con el lanzamiento de dos dados para que haya la misma probabilidad de ganar?

En parejas

Reúnete con un compañero y analicen el siguiente planteamiento.

1. A continuación se presenta un juego de azar. Analicen y discutan las condiciones en que juegan A y B.

Palos de la baraja inglesa

- La baraja inglesa consta de 52 cartas.
- Tiene cuatro palos (trébol, diamante, corazón y picas).
- Cada palo tiene cartas con las letras A, J, Q, K y con los números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10, todas con la misma figura.
- Dos jugadores A y B sacan cartas sin ver el palo; el jugador A gana si saca cualquier carta que tenga una letra; el jugador B gana si saca una carta que tenga un número.

2. A partir de este juego contesten las preguntas:

a) ¿Qué jugador piensan que ganará? Justifiquen la respuesta. ________

b) ¿Qué probabilidad de ganar tiene el jugador A si tiene cartas con un solo palo? ________

c) ¿Qué probabilidad de ganar tiene el jugador B si tiene cartas con un solo palo? Expliquen su respuesta. ________

d) ¿Qué probabilidad de ganar tiene el jugador A con toda la baraja? ________

e) ¿Qué probabilidad de ganar tiene el jugador B con toda la baraja? ________

f) ¿Son equiprobables los eventos elegidos por cada jugador en este juego? ________

3. Comparen sus respuestas con las de otros equipos. ¿En qué son similares? ¿En qué difieren? ¿Qué modificación harían al juego para que los jugadores tengan la misma probabilidad de ganar? Argumenten su respuesta.

Para avanzar

1. Lee la siguiente información y luego responde lo que se pregunta.

En el lanzamiento de una moneda o en el lanzamiento de un dado, ambos eventos tienen una característica común; en el primer caso, al lanzar una moneda ambas caras tienen la misma posibilidad de caer y, al igual que en este caso, en el lanzamiento de un dado, cada cara tiene la misma posibilidad de caer. Este tipo de eventos se conocen como eventos equiprobables, debido a que la probabilidad de todos los posibles resultados es igual.

a) ¿Cuál es la característica de los juegos justos? ________

b) ¿Qué estrategias seguirías para tener la mayor probabilidad de ganar un juego? ________

Tecnología

1. Lean en parejas el siguiente problema, analicen la posible solución y después sigan las indicaciones para resolverlo con el uso de la hoja de cálculo electrónica.

De una bolsa con fichas numeradas del 1 al 12, Ana y Karen juegan a sacar una ficha. Cuando sacan una ficha con número par, Ana gana 1 punto, y cuando sacan una ficha con número impar, Karen gana 1 punto.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane Karen? ________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que gane Ana? ________

c) ¿Los eventos son equiprobables? Justifiquen su respuesta. ________

2. Ahora, realicen una simulación de lanzamientos.

a) Abran la hoja de cálculo electrónica para simular el juego de Ana y Karen con 12 fichas.

b) Escriban en la celda A1 la fórmula =ALEATORIO.ENTRE(1,12). Esta fórmula genera números de forma aleatoria del 1 al 12.

c) Arrastren la fórmula hasta la celda A100.

d) Escriban en la celda B1 la fórmula =CONTAR.SI(A1:A100,"=1"); en B2, =CONTAR.SI(A1:A100,"=2"). En B3, B4, B5, B6, B7, B8, B9, B10, B11 y B12, anoten la misma fórmula y sólo modifiquen lo necesario para que cuente la frecuencia de cada número: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12, que se obtiene de A1 hasta A100.

e) En C1 escriban la fórmula =B2+B4+B6+B8+B10+B12. ¿Qué significa el valor que obtienen? ________

Tecnología

f) En D1 escriban la fórmula =B1+B3+B5+B7+B9+B11. ¿Qué significa el resultado? ______

g) Opriman la tecla F9 y observen qué sucede.

3. Si se hacen 10 secuencias y en cada una se sacan 100 fichas de la bolsa, ¿quién obtuvo más puntos en cada secuencia? ______

4. Opriman 10 veces la tecla F9 y registren en su cuaderno los puntos obtenidos en cada una.

5. Si se sacan 1 000 fichas de la bolsa, ¿quién obtendrá más puntos? ______

¡A investigar!

Explora la siguiente página electrónica: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Azar_y_probabilidad/azar_probabilidad_1.htm (Consulta: 13 de enero de 2017).

Resuelve todas las actividades planteadas y, luego, haz una exposición ante el grupo.

Valoración personal

Analiza los siguientes aspectos en relación con tu trabajo.

Aspecto	Nivel de desempeño (marca con una ✓)		
	Fue excelente	Fue el adecuado	Puedo mejorarlo
Identifico que existen eventos equiprobables siempre que tengan la misma probabilidad de ocurrencia.			
Reconozco juegos de azar justos a partir del cálculo de probabilidades.			
Reconozco que la probabilidad de un evento es el cociente de casos favorables entre casos posibles.			

¿En qué contenidos específicos aún presento dificultades?
¿Qué acciones tomaré para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumí para desarrollar el hábito del pensamiento racional?
Considerando mi autoevaluación y el trabajo realizado en esta lección, me califico globalmente con:

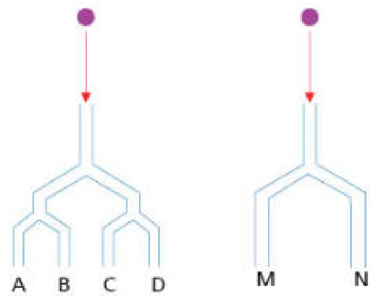
Recuerda que en la medida en que respondas esta actividad con honestidad, podrás tener una mejor valoración de ti mismo.

Por tu cuenta

1. En las siguientes figuras una bola se introduce por donde indican las flechas. ¿Qué probabilidad existe de que salga por A, B, C o D?

a) ¿Hay la misma probabilidad de que la bola salga por A, B, C o D? Justifica tu respuesta. ______

b) ¿Hay la misma probabilidad de que la bola salga por M o N? Justifica tu respuesta. ______

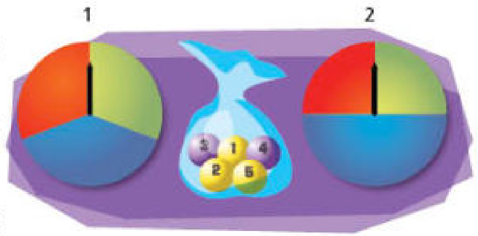


2. Analiza si los siguientes experimentos son equiprobables.

a) Girar la ruleta 1 y que pare en el color rojo, azul o verde.

b) Girar la ruleta 2 y que pare en el color rojo, azul o verde.

c) Extraer una canica amarilla o morada de la bolsa que se muestra.



3. Compara tus respuestas con tus compañeros y explica si es justo o no el juego y por qué.

Conexiones

Matemáticas, lenguaje y comunicación

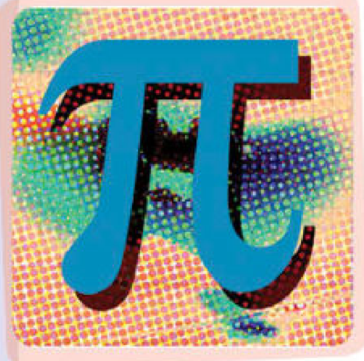
Las matemáticas son la clave para comprender cómo se relacionan el ser humano y la naturaleza tanto en el macrocosmos como en el microcosmos. Por ello, son una ciencia reconocida en todas partes. Entrar al mundo de las matemáticas nos hace estar más cerca del Universo.

Sobre el tipo de lenguaje que son las matemáticas el informe Cockroft dice: "Creemos que la razón principal para que se enseñen matemáticas a todos los niños es el hecho de que las matemáticas se pueden usar como un poderoso medio de comunicación".

A su vez, Alberto Barajas, un reconocido matemático, opinó en una entrevista: "Cuando he platicado con mis amigos, con Graef sobre todo, sobre el placer que nos producen las matemáticas, hemos convenido en que las obsesiones de las matemáticas son muy parecidas a las de los enamorados. (...) La atención se concentra en un solo objetivo que borra a todos los demás. El rostro amado que vemos incesantemente o el teorema que nos inquieta a todas horas".

Las matemáticas son la fundamentación de casi todo el conocimiento humano. Se dice que absolutamente todos los fenómenos de cualquier tipo se pueden expresar mediante ecuaciones.

La universalidad de esta ciencia radica en que no está fundamentada en costumbres, tradiciones o ideas particulares, sino que su fundamento es el mismo razonamiento humano.



Letra griega pi

El estudio de las matemáticas nos ayuda a comprender el Universo.

Actividad

1. De acuerdo con la lectura anterior, ¿las matemáticas son un medio de comunicación? ¿Por qué?
2. Ahora que han adquirido un lenguaje matemático a lo largo de su formación básica (primaria y secundaria), podrán comprender mucha información sobre por qué surgen las matemáticas y por qué se consideran como el lenguaje universal. Para ello, vean un documental sobre su historia: https://www.youtube.com/watch?v=moVE_sQePYA (consulta: 23 de enero de 2017).
3. Luego, respondan las siguientes preguntas.
   a) ¿Por qué surgieron las matemáticas?
   b) ¿Quiénes han sido los principales matemáticos en la historia de la humanidad?

Evaluación tipo PISA

Ventas por catálogo

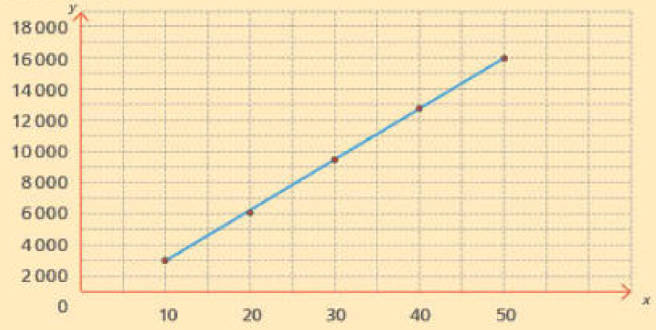
Azucena vende cosméticos por catálogo. Dos de los productos que más venden son: el producto A, le gana 40 % de la inversión; mientras que al producto B, le gana 35 %. En este mes hizo una inversión total de \$4 200 en los dos productos. Las ganancias por las ventas del producto A superan en \$405 a las ganancias por las ventas del producto B.

1. Escribe un sistema de ecuaciones que modele dicha situación.

2. Determina la cantidad de dinero que Azucena invirtió en cada producto.

Relación de variables

En la siguiente gráfica se ha representado la variación entre el volumen y la altura de un cilindro.



1. De acuerdo con la gráfica, ¿qué variable de la fórmula del volumen del cilindro se mantiene constante?

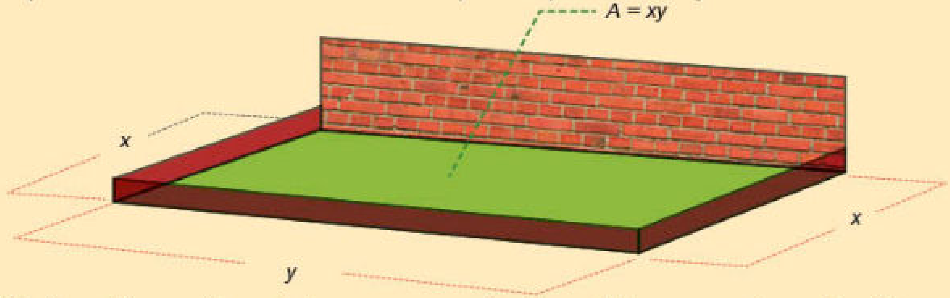
   a) h b) π c) r d) 2

2. ¿Qué tipo de variación existe entre la altura y el volumen de un cilindro? Da argumentos matemáticos.

3. ¿Qué tipo de variación existe entre el radio y el volumen de un cilindro si se mantiene constante su altura? Da argumentos matemáticos.

El granjero

Un granjero le dijo a su hijo que utilizara 50 metros de alambre para cercar un terreno y que ese espacio será para construir su casa. El hijo se preguntó si con 50 metros de alambre podría conseguir diferentes tipos de terrenos y así escoger el más grande. Lo primero que se le ocurrió al hijo fue construir la cerca de manera que uno de los lados fuera la barda, así podría aprovechar mejor el alambre.

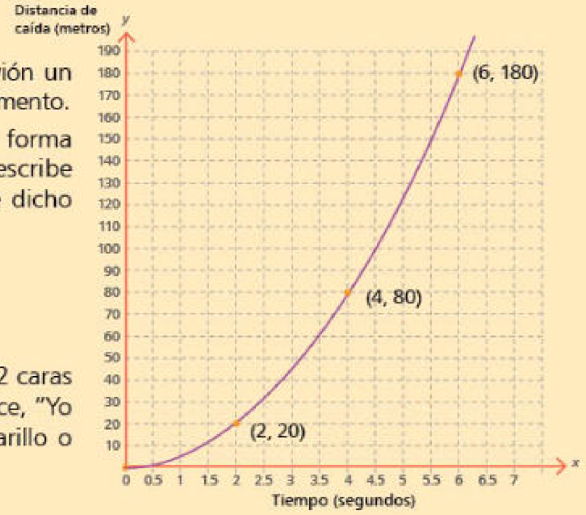


1. ¿Cuál es el área máxima de terreno que puede obtener? Da argumentos matemáticos.

Caída libre

En un experimento de caída libre, se soltó desde un avión un objeto metálico. La siguiente gráfica modela dicho experimento.

1. Si se propone una función cuadrática de la forma $y = at^2 + bt + c$ como modelo continuo, escribe una expresión algebraica (función) que modele dicho fenómeno. Registra tu proceso de resolución.



Juego de dados 1

Un dado de seis caras tiene 2 caras pintadas de verde, 2 caras pintadas de amarillo y 2 caras pintadas de rojo. Ana dice, "Yo gano si sale verde"; Diego dice, "Yo gano si sale amarillo o rojo" y Adrián dice, "Yo gano si no sale verde".

1. ¿Cuál es la probabilidad que tiene de ganar cada quien al tirar este dado?

2. ¿Los eventos mencionados en el juego del dado son equiprobables? Justifica tu respuesta.

Juego de dados 2

Se tienen dos dados, uno azul y otro rojo, que tienen sus caras marcadas con puntos del uno al seis. El experimento consiste en lanzar simultáneamente los dos dados. Los resultados posibles del experimento son parejas de números en los cuales el primero es el número de puntos del dado rojo y el segundo del azul.

1. Formula un evento compuesto por dos eventos que sean mutuamente excluyentes.

2. Formula un evento compuesto por dos eventos que sean independientes.

Bibliografía

Bibliografía para el profesor

- Bodrova, Elena y Deborah León, *Herramientas de la mente*, México, SEP, 2004 (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Brophy, Jere, *La enseñanza. Cuadernos de la Academia Internacional de Educación*, México, SEP/UNESCO, 2000 (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Chevalard, Bosch y Gascón, *Estudiar matemáticas*, México, SEP, 1998 (Biblioteca del normalista).
- Clark, D., *Evaluación constructiva en matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2002.
- Cohén Mochón, Simón, *Desarrollando conceptos de álgebra por medio de actividades de construcción y exploración en la hoja de cálculo*, México, McGraw-Hill Interamericana, 2004.
- Enzensberger, Hans Magnus, *El diablo de los números*, México, Ediciones Siruela, 1997.
- Gardner, Howard, *La mente no escolarizada. Cómo piensan los niños y cómo deberían enseñar las escuelas*, México, SEP, 1997 (Biblioteca del normalista).
- Gutiérrez, K. y C. Sánchez, Matemáticas. *Libro para el maestro*, México, Santillana, 2008 (Aprobado Secundaria).
- Hammond, Linda, *El derecho de aprender. Crear buenas escuelas para todos*, México, SEP, 2002 (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Hargreaves, Andy; Earl, Lorna y Jim Ryan, *Una educación para el cambio. Reinventar la educación de los adolescentes*, México, SEP, 2000 (Biblioteca del normalista).
- Hitt Espinosa, Fernando, *Funciones en contexto*, México, Pearson Educación, 2002.
- Olea, A., *La comprensión del concepto de variable a través del trabajo con la hoja electrónica de cálculo*, Tesis de maestría, México, Cinvestav-IPN, 2007.
- Perero, Mariano, *Historia e historias de matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.
- Perkins, David, *La escuela inteligente: del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente*, México, SEP, 2000 (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Perrenoud, Philippe, *Diez nuevas competencias para enseñar*, México, SEP, 2004 (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Reynoso Angulo, Rebeca, *Una mirada a la ciencia: antología de la revista ¿Cómo ves?* México, SEP/UNAM, 2001 (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Rivaud, Juan José, *Matemáticas para todos*, México, Fondo Mexicano para la Educación y el Desarrollo, 2003.
- Secretaría de Educación Pública, *Fichero de actividades didácticas*. Matemáticas. Educación Secundaria, México, SEP, 2000.
- Secretaría de Educación Pública, *Libro para el maestro*. Matemáticas. Educación Secundaria, México, SEP, 2000.
- Ursini, S. *et al.*, *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México, Trillas, 2005.
- Ursini, S. y Ma. Teresa Rojano, *Enseñar Álgebra con Logo*, México, McGraw-Hill, 2005.

Bibliografía para el alumno

- *Una aventura a la incertidumbre*, México, Santillana, 2004 (Biblioteca Juvenil Ilustrada).
- Bosch, C. *et al.*, *Una aventura a las formas*, México, Santillana, 2004 (Biblioteca Juvenil Ilustrada).
- De la Peña, J. A., *Geometría y el mundo*, México, Santillana, 2002 (Biblioteca Juvenil Ilustrada).
- Enzensberger, Hans Magnus, *El diablo de los números*, Madrid, Siruela, 1997.
- Tahan, M., *El hombre que calculaba*, México, Noriega Editores, 1992.
- Hitt, F., *Funciones en contexto*, México, Prentice Hall, 2002.
- Linares, S., *"Matemáticas escolares y competencia matemática"*, en M. C. Chamorro, coord., Didáctica de las Matemáticas, Madrid, Pearson-Prentice Hall, 2003.
- Loyd, Sam, *Nuevos acertijos*, Barcelona, RBA Coleccionables, 2007 (Biblioteca Desafíos Matemáticos).
- Perelman, Yakob, *Matemáticas recreativas Barcelona*, RBA Coleccionables, 2008 (Biblioteca Desafíos Matemáticos).
- Segovia, I., *Estimación en cálculo y medida*, Madrid, Síntesis, 1989.
- Secretaría de Educación Pública, *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*, México, SEP, 2008 (Reforma Integral de la Educación Básica. Secundaria).
- Secretaría de Educación Pública, *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares. Casos y perspectivas*. México, SEP, 2011 (Serie: Teoría y práctica curricular de la Educación Básica).
- Secretaría de Educación Pública, *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo*, México, EMAT, 2000 (Educación Secundaria).
- Tahan, M., *El hombre que calculaba*, México, Noriega Editores, 1994.

Bibliografía consultada

- Artigue, M., "Ingeniería didáctica", en *Ingeniería didáctica en educación matemática*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.
- Batanero, M. C. *et al.*, *Razonamiento combinatorio*, Madrid, Síntesis, 1996.
- Batanero, M. C., "Significado y comprensión de las medidas de posición central", en *Uno*, núm. 25, Barcelona, Graó, 2000.
- Brousseau, Guy, "Educación y didáctica de las matemáticas", en *Educación matemática*, vol. XII, núm. 1, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2000.
- Casanova, M. A., *Evaluación educativa*, México, SEP/Muralla, 1998 (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Chevallard, Y. *et al.*, (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, México, SEP, 1998 (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Clark, D., *Evaluación constructiva en matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2002.
- Díaz, J. *et al.*, *Azar y probabilidad*, Madrid, Síntesis, 1987.
- Gardner, Howard, *La mente no escolarizada. Cómo piensan los niños y cómo deberían enseñar en las escuelas*, México: SEP/Fondo Mixto/Paidós, 1997 (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Grupo Azarquiel, *Ideas y actividades para enseñar álgebra*, Madrid, Síntesis, 1993.
- Grupo Beta, *Proporcionalidad geométrica y semejanza*, Madrid, Síntesis, 1990.
- Hargreaves, Andy *et al.*, *Una educación para el cambio. Reinventar la educación de los adolescentes*, México: SEP/Octaedro, 2000 (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Hitt, F., *Funciones en contexto*, México, Prentice Hall, 2002.
- Linares, S., "Matemáticas escolares y competencia matemática", en M. C. Chamorro, coord., *Didáctica de las matemáticas*, Madrid, Pearson-Prentice Hall, 2003.
- Loyd, Sam, *Nuevos acertijos*, Madrid, RBA Coleccionables, 2007 (Biblioteca Desafíos Matemáticos).
- Perelman, Yakov, *Matemáticas recreativas*, Buenos Aires, Martínez Roca, 2008.
- Rivaud, Juan José, *Matemáticas para todos*, México, Fondo Mexicano para la Educación y el Desarrollo, 2003.
- Rojano, Teresa, "Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México", en *Revista Iberoamericana de Educación*, núm. 33, Madrid, Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura, 2003.
- Sadovsky, Patricia, *Enseñar matemáticas hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.
- Segovia, I., *Estimación en cálculo y medida*, Madrid, Síntesis, 1989.
- Secretaría de Educación Pública, *Fichero, Actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria*, México, SEP, 2000.
- Secretaría de Educación Pública, *Educación Secundaria*, México, SEP, 2000.
- Secretaría de Educación Pública, *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*, México, SEP, 2008 (Reforma Integral de la Educación Básica. Secundaria).
- Secretaría de Educación Pública, *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares. Casos y perspectivas*, México, SEP, 2011 (Serie: Teoría y práctica curricular de la Educación Básica).
- Secretaría de Educación Pública, *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo*, EMAT, México, SEP, 2000 (Educación Secundaria).
- Secretaría de Educación Pública, *Geometría dinámica*. Educación secundaria, México, SEP, 2000.
- Secretaría de Educación Pública, *Un reto más. Boletín trimestral de matemáticas. Educación secundaria*, México, SEP, 1997.
- Trigueros, M.; S. Ursini y D. Lozano, "La conceptualización de la variable en la enseñanza media", en *Educación matemática*, vol. 12, núm. 2, agosto, 2000.

Direcciones electrónicas

- Programa para realizar figuras geométricas, http://www.geogebra.org (Consulta: 23 de enero de 2017).
- Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa, http://www.ilce.edu.mx (Consulta: 23 de enero de 2017).
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía, http://inegi.org.mx/ (Consulta: 23 de enero de 2017).
- Proyecto educativo que pretende simplificar al máximo la búsqueda en internet de páginas sobre matemáticas, http://www.recursosmatematicos.com/ (Consulta: 23 de enero de 2017).
- Secretaría de Educación Pública, http://www.sep.gob.mx (Consulta: 23 de enero de 2017).
- Matemáticas, fichero de actividades, http://www.uv.mx/personal/grihernandez/files/2011/04/ficheroactividades.pdf (Consulta: 23 de enero de 2017).
- Recursos matemáticos que incluyen juegos, acertijos y actividades, http://descartes.cnice.mec.es/matemagicas/index.htm (Consulta: 23 de enero de 2017).
- Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas, NCTM por sus siglas en inglés, http://www.nctm.org/ (Consulta: 23 de enero de 2017).
- Portal Educativo gratuito de la Fundación Gabriel Piedrahita Uribe, http://www.eduteka.org/ (Consulta: 23 de enero de 2017).
- Enseñanza de las ciencias y las matemáticas con tecnología, http://gama.dgsca.unam.mx/ruaproduccion/objeto/3810/ensenanza-de-las-matematicas-con-tecnologia-mas-sobre-geometria-dinamica (Consulta: 23 de enero de 2017).
- Herramientas y programas desarrollados por Microsoft para mejorar la educación, http://www.microsoft.com/latam/educacion/ (consulta: 23 de enero de 2017).
- Software educativo y publicaciones interactivas, http://www.softronix.com/ (Consulta: 23 de enero de 2017).
- Curso en línea de Excel, http://www.aulaclic.es/excel2003/ (Consulta: 23 de enero de 2017).
- Portal educativo dedicado a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria, http://www.mismates.net/ (Consulta:23 de enero de 2017).
- Portal de la compañía Texas Instruments dedicado a la educación y tecnología, http://education.ti.com/ (Consulta: 23 de enero de 2017).
- Portal de la Red de Maestros del Ministerio de Educación de Chile, http://www.rmm.cl (Consulta: 23 de enero de 2017).
- Televisión educativa en línea, http://www.televisioneducativa.gob.mx (Consulta: 23 de enero de 2017).

Créditos iconográficos

Bloque 1

Fotografía:

Archivo Norma (pp. 16, 19, 25, 26, 33, 69)

Ilustración:

Sergio Salto (pp. 17, 18, 47, 49, 51, 52, 58, 66, 71); Alerick Monter (pp. 48, 49)

Iconografía de diversa procedencia:

p. 16: (arr. izq.) pizarra con ecuación, fotografía: © Shutterstock; **p.19**: (ab. der.) ecuación, fotografía: © Shutterstock; **p. 28** adolescentes caminando en el bosque, fotografía: © Shutterstock; **p. 41** mapa de México, mapa: © Shutterstock; **p. 42** avión en pleno vuelo, fotografía: © Shutterstock; **p. 56** dados y monedas, fotografía: © Shutterstock; **p. 60** teclado de teléfono, fotografía: © Shutterstock; **p. 69**: (ab. der.) Sistema Solar, ilustración: © Shutterstock.

Bloque 2

Fotografía:

Archivo Norma (pp. 72, 75, 109)

Ilustración:

Sergio Salto (pp. 73, 97, 102, 103, 107, 111); Emmanuel Cruz (p. 87)

Iconografía de diversa procedencia:

p. 72: (arr. izq.) pizarra con ecuación, fotografía: © Shutterstock; **p. 88** hoja de papel de China, fotografía © Shutterstock; **p. 89** hoja de papel de China, fotografía © Shutterstock.

Bloque 3

Fotografía:

Archivo Norma (pp. 112, 114, 121, 133)

Ilustración:

Sergio Salto (pp. 113, 122, 126, 134, 149, 152, 153, 155, 156, 157, 161)

Iconografía de diversa procedencia:

p. 112: (arr. izq.) pizarra con ecuación, fotografía: © Shutterstock; **p. 121:** (arr. izq.) crucero, fotografía: © Shutterstock; **p. 121:** (arr. izq.) paisaje de playa, fotografía: © Shutterstock; **p. 126** bandera de México, fotografía: © Shutterstock; **p. 139** Arco *Gateway* de San Luis Missouri, fotografía: © Shutterstock; **p. 153:** (centro der.) dados, fotografía: © Shutterstock; **p. 159:** (arr. der.) estructura del ADN, fotografía: © Shutterstock; **p. 159:** (ab. der.) tomografía magnética, fotografía: © Shutterstock.

Bloque 4

Fotografía:

Archivo Norma (pp. 162, 165, 179, 187)

Ilustración:

Sergio Salto (pp.163, 164, 171, 177, 188, 189, 206)

Iconografía de diversa procedencia:

p.162: (arr. izq.) pizarra con ecuación, fotografía: © Shutterstock; **p.181** pirámides de Gizah, fotografía: © Shutterstock; **p.199** monitor cardiaco, fotografía: © Shutterstock; **p.205** Catedral de Notre Dame de París, fotografía: © Shutterstock.

Bloque 5

Fotografía:

Archivo Norma (pp. 208, 221, 227, 230, 233, 235, 247)

Ilustración:

Sergio Salto (pp. 209, 211, 214, 215, 216, 217, 220, 221, 242, 246, 249)

Iconografía de diversa procedencia:

p. 208: (arr. izq.) pizarra con ecuación, fotografía: © Shutterstock; **p. 211** puente Golden Gate de San Francisco, fotografía: © Shutterstock; **p. 213** botes de leche y jugo, fotografía: © Shutterstock; **p. 241** dados, fotografía: © Shutterstock; **p. 244** cartas de la baraja inglesa, fotografía: © Shutterstock; **p. 247** nebulosa, fotografía: © Shutterstock.